Math. P.
715
d

Math. P.
715 d

Sternickel

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MÜNCHEN

[illegible], 18[illegible].

[illegible]

Algebra numerosa

oder

practisch-demonstrative Anweisung zur Buchstaben-Arithmetik.

Ein Hilfs- und Uebungsmittel für Gymnasien, Stadt-Industrie- und Werkschulen, so wie für Militair-Bildungs-Institute

von

F. W. Sternickel,

fürstlich schwarzburg. Landcommissair und Privatlehrer der Mathematik.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Ilmenau, 1832.

Druck und Verlag von Bernh. Fr. Voigt.

G. n. 2388

Vorwort.

Daß die gute Aufnahme meiner bisherigen Werke mich veranlaßte, eine Algebra oder Buchstaben-Arithmetik zu schreiben, um auch in diesem Theile der Mathematik einen schriftstellerischen Versuch zu wagen, wird mir, wie ich billig hoffen darf, nicht für Gewinnsucht ausgelegt werden.

Die in mehrern sehr schätzbaren algebraischen Werken enthaltenen Uebungsbeispiele sind nach meiner Ansicht wohl nicht zureichend, diese abstracte Wissenschaft, in der man schlechterdings durch viele Beispiele nur die gewünschten Fortschritte macht, zu erlernen. Auch ist der Lehrer nicht immer, sondern wohl selten von der glücklichen Beschaffenheit, die in seinem Hilfslehrbuche nicht enthaltene Anzahl Uebungsprobleme in Gegenwart seiner Schüler aus dem Stegreife zu entwerfen und zu dictiren, und in sofern möchte meine Abhandlung, die gewiß eine sehr zureichende Anzahl durchaus berechneter Aufgaben enthält, nicht unwillkommen sein. Daß ich in derselben nicht weiter, als zur Auflösung der Aufgaben mit einer, und dann mit zwei und drei, unbekannten Größen vorgeschritten, und den Vortrag solcher Probleme mit unreinen quadratischen und kubischen Gleichungen, so wie die Progressionslehre ꝛc. ꝛc. weggelassen habe, wird man dadurch entschuldigen, daß ich keine voll-

ständige Algebra, sondern aus ihr nur das abhandeln wollte, was am meisten in das Wesentlichste und Gemeinnützigste der angewandten Mathematik eingreift und den Unterricht der Algebra interessant machen möchte. Daher bin ich überzeugt, daß meine Bemühung, den Lehrern ein Hilfs- und den Schülern ein Erleichterungsmittel in die Hände zu geben, wohl nicht als eine Unnützlichkeit aufgenommen werden möchte.

Einsichtsvollere und geschicktere Lehrer bitte ich daher, dies Werkchen mit billiger Rücksicht auf seine Tendenz zu beurtheilen, und ihm eine eben so freundliche Aufnahme, als meinen vorigen Werken über Geometrie, zu schenken.

Greußen, im Fürstenthum Schwarzburg-Sondershausen, im Monat Februar 1832.

Fr. W. Sternickel.

Inhalt.

		Seite.
I.	Einleitung	1
II.	Grund- und Lehrsätze	6
III.	Die vier Rechnungsarten in ungebrochenen Größen	9
IV.	Die vier Rechnungsarten mit gebrochenen Größen	26
V.	Von den Quadrat- und Cubikgrößen, oder über die Potenz und Würdenlehre	35
VI.	Grundsätze zur Anstellung, Bildung und Auflösung algebraischer Gleichungen	43
VII.	Auflösung algebraischer Aufgaben mit einer unbekannten Größe	49
VIII.	Auflösung algebraischer Aufgaben mit zwei und mehr unbekannten Größen	97

**

I.

Einleitung.

Algebra ist derjenige Theil der Mathematik, welcher endliche Größen nach allgemeinen Zeichen zu bestimmen und zu finden lehrt; sie ist die Wissenschaft, die eine Größe auf zweierlei Art ausdrückt, um dadurch die Berechnung und Werthbestimmung der gesuchten Größe mit Sicherheit zu bewirken.

Messen wir eine ausgedehnte Größe, so verwandeln wir sie zu einer zählbaren Sache, stellen sie uns als eine Menge von Theilen vor, die, da sie ähnliche und noch dazu gleiche Dinge sind, dem Verstande einerlei Begriffe erwecken, und sich sonach mit einander aufzählen lassen. Die Gründe der Geometrie lehren, daß das Maß einer Fläche durch die Multiplication ihrer Längen- und Breitenmaße, und das Maß eines Körpers durch Multiplication dessen Längen-, Breiten- und Höhenmaßes gefunden wird.

Auf der andern Seite kann dagegen eine Menge von Dingen, von welcher Art sie auch sein mögen, durch allerlei beliebige Zeichen ausgedrückt werden. Die Römer hatten ihre besondern Zeichen, Italiener und Franzosen, so wie späterhin die Deutschen, verbesserten

aber, wo es nöthig war. Und so entstand denn nach und nach die gegenwärtige Bezeichnung der Größen durch Buchstaben.

Es ist allerdings schwer, die Algebra theils angenehm und unterhaltend, theils verständlich zu machen, wenn man nicht gleich anfänglich ihre Grundsätze auf bestimmte Beispiele von Größen der einen oder der andern Art anwendet. Dadurch wird es so gut als unmöglich, diese Wissenschaft so abzuhandeln, daß sie in der Methode und der Form des Vortrags so erscheine, wie eine allgemeine Mathematik eigentlich erscheinen soll.

Algebra kann zwar auf keine andere Art als durch Beispiele gelehrt werden, diese sind aber in den meisten Lehrbüchern blos darauf abgezweckt, die Kunst dieser Wissenschaft vorzutragen, ohne dabei den eigentlichen Zweck ins Auge zu fassen, woraus sich denn auch nicht mehr ergibt, als daß Buchstaben aus Buchstaben entwickelt werden. Wie abstrakt, wie höchst ermüdend ist nicht diese Methode für den, der noch im Dunkeln herumtappt, um nur erst einen Begriff zu erhaschen?

Die Algebra ist die einzige Wissenschaft, um den Verstand im Erfinden zu üben; wer mag aber erfinden, ohne einen Zweck vor sich zu haben, der ihn von irgend einer Seite interessirt? Wem scheint die im Erfinden angewandte Mühe und Geistesanstrengung hinlänglich belohnt, wenn er am Ende nicht recht weiß, was er erfunden habe?

Die Benennung Algebra oder Buchstabenrechnung wird in einem eingeschränkteren Verstande derjenigen Rechenkunst gegeben, in welcher statt der Zahlen allge-

meine Zeichen angewandt, die Aufgaben selbst aber so gewählt werden, daß man nur arithmetische Beispiele annimmt, zu deren Auflösung die gemeine Arithmetik keine Regeln enthält.

Die Benennung Algebra leitet man gewöhnlich von einem orientalischen Weltweisen Geber ab, von welchem man indeß nichts Bestimmtes weiß. Richtiger wird dieselbe aber von dem arabischen Worte geber (potens est) abgeleitet, wo sie dann so viel als eine Wissenschaft bedeuten würde, die sehr vieler Dinge mächtig ist, oder durch welche viele Dinge ausgerichtet werden können, zu welchen die gemeine Arithmetik unzureichend ist.

Irren würde man jedoch, wenn man die Araber als die ersten Erfinder dieser Wissenschaft annehmen wollte. Wir haben eine Arithmetik des Diophantus, eines Griechen, von welchem man zwar das Zeitalter nicht genau weiß, der aber doch nicht jünger, als das vierte Jahrhundert nach Christo sein kann. Diese Arithmetik, von der wir indeß kaum die Hälfte kennen, indem nicht mehr davon zu uns gelangt ist, stimmt in den schwerern Aufgaben mit der Algebra der Araber wesentlich überein, und unterscheidet sich nur in der Art, die Größen zu bezeichnen. Von den Griechen wurde diese Wissenschaft nicht verbreitet, sondern allererst am Ende des funfzehnten Jahrhunderts von den Arabern in die Morgenländer gebracht, von wo sie die Italiener lange Zeit allein und als ein großes Geheimniß bewahrten. Am Ende des sechzehnten Jahrhunderts hatte sie in Frankreich einen großen Beförderer an Franciscus

Vieta, der insonderheit die ersten Buchstaben des Alphabets zur Bezeichnung der in einer algebraischen Aufgabe gegebenen Größen anwandte, und dadurch in der Auflösung einer jeden Aufgabe eine allgemeine Formel zur Auflösung aller ähnlichen Fälle finden lehrte.

Gegen Ende des siebzehnten Jahrhunderts erschienen Newton und Leibnitz als Urheber einer neuen Methode, durch welche die Algebra, die Mathematik überhaupt, und selbst die Philosophie mehr gewonnen hat, als durch die Erfindung ihrer Vorgänger, und wodurch der menschliche Verstand ein Mittel erhalten hat, Wahrheiten mit Ueberzeugung einzusehen, an deren Erkenntniß unsere Vorfahren verzweifeln mußten. Was die Methoden des Newton und Leibnitz leisten, wird von den neuern Mathematikern jetzt großen Theils durch eine andere Methode erwiesen, welche Euler in seiner Analysi infinitorum gelehrt.

Obschon in ganz Europa, insonderheit in dem lehrbegierigen Deutschland, die Algebra außerordentliche Fortschritte gemacht hat, so sind dennoch die Vorurtheile zu groß, die man von ihrer vermeinten Schwierigkeit, Dunkelheit und ihrem eingeschränkten Nutzen hegt, und wären sie es auch nicht, so würde mich die Weitläufigkeit der nützlichen Wahrheiten, die sie enthält, von einer vollständigen Abhandlung derselben dennoch abhalten, indem ich mich zu schwach fühle, diese Wissenschaft in ihrem gegenwärtigen großen Umfange vorzutragen. Deßhalb werde ich mich blos bemühen, eine allgemeine Einsicht in die Natur dieser Wissenschaft zu geben, die man von ihr würde erwarten können, wenn sie mehr auf die

Geschäfte des gemeinen Lebens angewendet würde. Es ist wahr, daß die bekanntesten Schriften sie in eine solche Dunkelheit hüllen, und sonach ihren wahren Zweck und Nutzen so verbergen, daß man meinen sollte, ihr Endzweck bestehe blos in einer gewissen künstlichen Versetzung der Buchstaben, oder höchstens in unfruchtbaren tiefsinnigen Betrachtungen und Versuchen; weiter unten bei Auflösung der Aufgaben wird sich aber ergeben, daß dies nicht der Fall ist, sondern viel Vergnügen gewährt und die Mühe reichlich lohnt, die man zur Erlernung dieser Wissenschaft verwendet.

Die einzige wahre und beste Methode, die Algebra zu studiren, ist: sie in einer Reihe auf einander folgender Beispiele zu treiben, in denen sich eine Wahrheit nach der andern dem Verstande entwickelt, und dann die allgemeinen Regeln für ähnliche Fälle daraus ableitet. Diese Wissenschaft mit gutem Erfolge treiben, erfordert weiter nichts als eine Fertigkeit in der Bruchrechnung, hauptsächlich in Decimalbrüchen, und dann in der Ausziehung der Wurzeln.

Hierin liegt aber wohl der Grund, warum sie so wenig Anbeter findet, weil die Bruchrechnung in den meisten Schulen nur nothdürftig und mit so weniger Belehrung für den Verstand betrieben wird.

II.

Grund= und Lehrsätze.

Die Mathematik beschäftigt sich in allen ihren Theilen mit Größen.

Durch eine Größe versteht man jeden Gegenstand der Mehrheit und Menge zählbarer Dinge.

Das Verhältniß zweier Größen gründet sich entweder auf ihre Gleichheit oder auf ihren Unterschied.

Durch den Unterschied zweier Größen versteht man, wie viel oder wie vielmal die eine gegebene Größe größer oder kleiner als die andere ist.

Wenn man zwei verschieden geformte Größen nach einem Maße mit einander vergleicht, und an ihnen eine gleiche Mehrheit des Maßes findet, so sind sie als eine Gleichung zu betrachten. Zur Bezeichnung der Gleichheit bedient man sich zweier Parallelstriche =.

Aus bekannten und unbekannten Größen Gleichungen bilden und durch Entwickelung dieser Gleichungen das Maß der unbekannten Größen finden, heißt algebraisch rechnen.

Zur Bezeichnung der Größen wähle man die Buchstaben nach Belieben; nur das i, o und s schließe man davon aus, indem leicht Verwechselung gegen die Eins, Null und Fünf entstehen können. Größen einerlei Art werden nicht mit verschiedenen, und Größen verschiedener Art nicht mit einerlei Buchstaben bezeichnet.

Zur Bezeichnung der bekannten Größen bedient man sich der Anfangsbuchstaben a, b, c, d ꝛc., und zur Bezeichnung der unbekannten der letztern x, y und z.

Die durch Buchstaben bezeichneten Größen der Algebra sind theils positiv, theils negativ, folglich einander ganz entgegengesetzt, und werden als solche bemerkt, welche theils mehr, theils weniger als Nichts enthalten. Wer z. B. 100 Thaler besitzt, der hat 100 Thaler mehr als Nichts, wer dagegen 100 Thaler schuldig ist, der hat 100 Thaler weniger als Nichts. Positive Größen bezeichnet man mit +, und negative durch —; dies wird durch minus und jenes durch plus ausgesprochen.

Wie vielmal eine Größe mehr oder weniger als Nichts bemerkt werden soll, wird durch Zahlen angezeigt, und diese Zahlen nennt man Coefficienten. Z. B. $+ 5a - 3b$ heißt: die durch a bezeichnete Größe soll fünfmal mehr, und die durch b bezeichnete Größe soll dreimal weniger als Nichts bemerkt und behandelt werden, welches, kurz gesagt, plus 5a minus 3b ausgesprochen wird.

Wird eine Größe zwei- oder mehrmal mit sich selbst multiplicirt, so zeigt die rechts über derselben befindliche Zahl, wie vielmal die Größe in einander multiplicirt ist. Z. B. $a \times a = a^2$, $a \times a \times a \times a = a^4$. Die dabei gesetzte Zahl heißt der Exponent, und man sagt in obigen Beispielen a der zweiten, a der vierten Potenz.

Eine nur einmal positiv oder negativ gegebene Größe bezeichnet man durch einen Buchstaben ohne die Ziffer der Einheit.

Ist der Anfang einer Zeile eine positive Größe, so wird das + weggelassen und darunter verstanden.

Die Bildung und Entwickelung algebraischer Gleichungen geschieht durch Addiren, Multipliciren, Dividiren, Quadriren und Cubiren, und durchs Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel.

Die durch Addition zusammengestellten Größen sind Summen.

Von zwei von einander abzuziehenden Größen heißt die eine das Subtrahendum, die andere der Subtractor, und das, was vom Subtrahendum übrig bleibt, Rest oder Differenz.

Die zu multiplicirende Größe wird Multiplicandus, und jene, welche multiplicirt, Multiplicator, und die, welche aus diesen beiden entspringt, Produkt genannt. Auch heißen beide mit einander multiplicirenden Größen Factoren, und die dadurch erzeugte Größe Factum.

Die Größe, welche durch eine andere dividirt wird, heißt Dividendus, die, durch welche das Dividiren geschieht, wird Divisor, und die durchs Dividiren erzeugte Größe wird Quotient genannt.

Eine mit sich selbst multiplicirte Größe nennt man Quadratwurzel, und das Produkt dieser Multiplication heißt Quadrat.

Eine mit ihrem Quadrat multiplicirte Größe nennt man Cubikwurzel, und das Produkt dieser Multiplication heißt Cubus.

III.

Die vier Rechnungsarten mit Buchstaben.

Addition in ungebrochenen Größen.

In der Algebra ist es ein seltener Fall, daß bei der Addition mehr als zwei Reihen zusammengezählt werden, fast immer geschieht dies der Uebung halber. Und hat man ja mehrere Reihen zu addiren, so thut man sehr wohl, sie einzeln zusammenzurechnen. Hat man mehrere Größen zu addiren, so setze man wo möglich einerlei Größen unter einander, und so, daß sie von der linken zur rechten Hand nach dem Alphabet folgen. Hierauf befolge man zwischen beiden Reihen nachstehende Regeln.

1.

Gleichartige Glieder von einerlei Zeichen werden zusammengezählt, und das herrschende Zeichen zur Summe herabgesetzt.

2.

Gleichartige Glieder von verschiedenen Zeichen werden von einander subtrahirt und dem Reste das Zeichen des größern Gliedes gegeben.

3.

Ungleichartige Glieder werden mit ihren Zeichen nach der Ordnung des Alphabets neben einander herabgesetzt.

Das Verfahren geschieht von der linken zur rechten Hand. Nachstehende Beispiele werden alles deutlicher machen.

Es sollen folgende Größenreihen addirt werden:

1)

$$\begin{array}{l} 5a + 3b - c - 8d + 4k \\ 3a - 7b + 6c + d + 2k \\ \hline 8a - 4b + 5c - 7d + 6k \text{ Summe.} \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{l} -3m - 7n + 2p + 8v - 9w \\ -2m + 7n - p - 8v + 9w \\ \hline -5m + p \text{ Summe.} \end{array}$$

Da sich die Größen n, v und w gegenseitig aufheben, so besteht die Summe nur noch in $-5m + p$.

3)

$$\begin{array}{l} 4m^3 - 2w^2 + 5x - 2z^4 \\ 3m^3 - 3w^2 - 3x + 5z^4 \\ \hline 7m^3 + w^2 + 2x + 3z^4 \text{ Summe.} \end{array}$$

4)

$$\begin{array}{l} 8a^3 + 3k - 5m^2 - n^5 + 6x^4 - 3y \\ -5a^3 + 4k + 3m + 9n^5 + 2x^4 - 7y \\ \hline +3a^3 + 7k - 2m^2 + 8n^5 + 8x^4 - 10y \text{ Summe.} \end{array}$$

5)

$$\begin{array}{l} -4b^2 + 7c - 2g^3 + 5p - x^3 \\ \quad 3b^2 - 2c + 4m - 3n^2 + z \\ \hline - b^2 + 5c - 2g^3 + 5p - x^3 + 4m - 3n^2 + z \end{array}$$

Hier in der fünften Aufgabe lassen sich blos die zwei ersten Glieder b und c als gleichartige Größen addiren oder vergleichen; die andern, als ungleichartige Größen, lassen sich nicht so behandeln und werden daher nach der Reihenfolge unten hinter einander mit ihren Zeichen angeschrieben.

6)

$$\begin{array}{r} a - b + c - d + h + k - m - n \\ a - b + c + d - h + k + m - n \\ a + b - c + d - h - k + m + n \\ a - b + c + d - h + k + m - n \\ -a + b - c - d + h + k - m + n \\ -a - b + c + d - h + k + m - n \\ \hline 2a - 2b + 2c + 2d - 2h + 4k + 2m - 2n \end{array}$$

7)

$$\begin{array}{r} -3v - 7w + 2x - 8y + 11z \\ 8v - 5w - 6x - 2y + 5z \\ 13v + 3w - 9x - 4y - 2z \\ 5v + 8w + 10x + 7y - 4z \\ -9v - 4w - 7x + 3y - 6z \\ -2v - 6w - 12x + 18y + 10z \\ \hline 12v - 11w - 22x + 14y + 14z \end{array}$$

Diese Beispiele werden hinreichend sein, das Verfahren der Addition erläutert zu haben. Wir schreiten daher zur

Subtraction in ungebrochenen Größen.

Eine Größe wird von einer andern schon dadurch abgezogen, wenn man das Zeichen des Subtractors in das entgegengesetzte verwandelt, nämlich + in —, und — in +. Denn wenn von + m das + k abgezogen werden soll, so setzt man als Rest m — k; und umgekehrt, will man von + m das — k abziehen, so entsteht der Rest m + k. Der Beweis hiervon ist dieser. Ehe ich von der Größe + m das + k abziehe, bereite ich sie dazu vor, indem ich ihr den Nullwerth + k — k anhänge, und sie sonach weder vermehre noch vermindere. Es ist daher m + k — k so viel als m. Nimmt man nun von diesem vorbereiteten Ausdrucke das + k hinweg, so bleibt als Rest m — k; wird aber das — k hinweggenommen, so bleibt m + k übrig.

Um algebraische Größen zu subtrahiren, befolge man nachstehende Regel:

Man stelle beide Reihen, Subtrahendum und Subtractor, in derselben Ordnung unter einander, wie oben bei der Addition. Hierauf verwandle man die Zeichen des Subtractors in die entgegengesetzten und verfahre dann, wie bei der Addition geschieht.

Einige Beispiele zur Uebung:

1) $$\begin{array}{rrrrr} 6a & -\ 4b & -\ 2c^3 & +\ d^2 & -\ 5k \\ 4a & +\ 2b & +\ 8c^3 & -\ 2d^2 & +\ 3k \\ - & - & - & + & - \\ \hline +\ 2a & -\ 6b & -\ 10c^3 & +\ 3d^2 & -\ 8k \end{array}$$ Rest.

2)

$$\begin{array}{l} 3m - n^2 + 4p - 5v + w \\ -4m - 7n^2 - 9p + 6v + 8w \\ + \quad + \quad + \quad - \\ \hline m + 6n^2 + 13p - 11v - 7w \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{l} 8a - 5b + 6c - 4d + 2g + 3h - 7m \\ 7a - 4b + 7c - 5d + 4g + 3h - 7m \\ - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \quad + \\ \hline a - b - c + d - 2g - 0 + 0 \end{array}$$

4)

$$\begin{array}{l} -5n^4 + 2p^2 + 12v^3 - 4w + 6x^5 - 3z \\ 8n^4 + 5p^2 - 7v^3 + 15w - 3x^5 + 7z \\ - \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \\ \hline -13n^4 - 3p^2 + 19v^3 - 19w + 9x^5 - 10z \end{array}$$

5)

$$\begin{array}{l} 13c - d - 5m^3 + 4n + p - 3x - 24 \\ 7c - 4d - 7m^3 + 9n + 5p - 4y - z \\ - \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \\ \hline 6c + 3d + 2m^3 - 5n - 4p - 3x + 4y + z - 24 \end{array}$$

Hier im fünften Beispiele enthält das Subtrahendum $-3x - 24$, und der Subtractor $-4y - z$. Da nun diese über einander stehenden Größen ungleichartig, mithin von einander nicht abzuziehen sind, so werden sie im Reste, wie oben geschehen, mit $-3x + 4y + z - 24$ angehängt. Noch mehr Beispiele aufzustellen, würde übrig sein, da man aus den gegebenen das Verfahren dieser Rechnungsart deutlich genug finden wird.

Multiplication in ungebrochenen Größen.

Die Multiplication einzelner Größen wird schon dadurch bewirkt, daß man beide Buchstaben zusammenstellt. Z. B. $a \times b$ ist $= ab$, $k \times m$ ist $= km$. Befinden sich Coefficienten bei den gegebenen Größen, so werden diese ebenfalls multiplicirt, nämlich $3a \times 4b$ ist $= 12ab$; $5k \times 3m$ ist $= 15km$. Haben die Größen Exponenten, so werden diese, wenn die Größen gleichartig sind, addirt. Z. B. $3a^3 \times 2a^2$ ist $= 6a^5$; $4k^3 \times 3k^4$ ist $= 12k^7$. Sind aber die Größen oder Buchstaben verschieden, d. h. in beiden Factoren ungleichartig, so werden sie nebst ihren Exponenten zusammengestellt. Z. B. $4a^3 \times b^2$ ist $= 4a^3b^2$; $3k^2 \times 4m^3 = 12k^2m^3$.

In Betreff der Zeichen + und — merke man, daß + mal + plus gibt, und eben so — mal — plus wird; allein + mal — und — mal + geben immer minus. Es folgen hier die vier Fälle zur Erläuterung dieses Gegenstandes

$$+a \times +b = +ab$$
$$-a \times +b = -ab$$
$$+a \times -b = -ab$$
$$-a \times -b = +ab$$

Soll man nun aber eine mehrgliedrige Größenreihe durch eine oder mehrere Größen multipliciren, so verfahre man nach folgender Regel:

1.

Man stelle die Buchstaben beider Factoren nach der Ordnung des Alphabets neben einander, vorher setze man aber

erst das Zeichen, welches das Factum erhalten muß.

2.

Die Coefficienten werden in einander multiplicirt.

3.

Die Exponenten der gleichartigen Größen werden addirt.

4.

Gleiche Zeichen geben plus (+) und ungleiche minus (—).

Nachstehende Uebungsbeispiele werden das Verfahren deutlicher machen.

1)

$$\begin{array}{l} a - b + c \\ a + b - c \\ \hline a^2 - ab + ac \\ \quad + ab - b^2 + bc \\ \quad\quad - ac + bc - c^2 \\ \hline a^2 - b^2 + 2bc - c^2 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{l} 6a - 4b - 3c \\ 2a + 3b - 4c \\ \hline 12a^2 - 8ab - 6ac \\ \quad + 18ab - 12b^2 - 9bc \\ \quad\quad - 24ac + 16bc + 12c^2 \\ \hline 12a^2 + 10ab - 30ac - 12b^2 + 7bc + 12c^2 \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{l} 5d - 3m^2 - 2x^3 + 4z \\ 3x^2 \\ \hline 15dx^2 - 9m^2x^2 - 6x^5 + 12x^2z \end{array}$$

4)

$$\begin{array}{l} 7a^4 - 5v + 3w + 12 \\ -\ 3vw \\ \hline -21a^4vw + 15v^2w - 9vw^2 - 36vw \end{array}$$

5)

$$\begin{array}{l} b^3 - 3b^2c + 3bc^2 + c^3 \\ 2b - 4c \\ \hline 2b^4 - 6b^3c + 6b^2c^2 + 2bc^3 \\ \quad - 4b^3c + 12b^2c^2 - 12bc^3 - 4c^4 \\ \hline 2b^4 - 10b^3c + 18b^2c^2 - 10bc^3 - 4c^4 \end{array}$$

6)

$$\begin{array}{l} 7x - 3y - 4z \\ 5x + 2y \\ \hline 35x^2 - 15xy - 20xz \\ \quad + 14xy - 6y^2 - 8yz \\ \hline 35x^2 - xy - 20xz - 6y^2 - 8yz \end{array}$$

7)

$$\begin{array}{l} 6x - 4az - 3x^2y + 1 \\ 2x + az \\ \hline 12x^2 - 8axz - 6x^3y + 2x \\ \quad + 6axz - 4a^2z^2 - 3ax^2yz + az \\ \hline 12x^2 - 2axz - 6x^3y + 2x - 4a^2z^2 - 3ax^2yz + az \end{array}$$

8)

$$\begin{array}{l} 2a^2 - bd + b^2 \\ 3a + 3b - 3k \\ \hline 6a^3 - 3abd + 3ab^2 \\ \quad + 6a^2b - 3b^2d + 3b^3 \\ \qquad - 6a^2k + 3bdk - 3b^2k \\ \hline 6a^3 - 3abd + 3ab^2 + 6a^2b - 3b^2d + 3b^3 - 6a^2k \\ \qquad + 3bdk - 3b^2k \end{array}$$

Da in obigen Partialprodukten sich gegenseitig nichts aufheben läßt, so sind sie im Hauptprodukte nach der Reihe hingeschrieben.

9)

$$
\begin{array}{l}
4m^2 - 3n + 2x^3 - 5p + 3vw^3 - v^3 \\
3m^3 + 2x^4 - 5v^2 \\
\hline
12m^5 - 9m^3n + 6m^3x^3 - 15m^3p + 9m^3vw^3 - 3m^3v^3 \\
\quad + 8m^2x^4 - 6nx^4 + 4x^7 - 10px^4 + 6vw^3x^4 - 2v^3x^4 \\
\quad\quad - 20m^2v^2 + 15nv^2 - 10v^2x^3 + 25pv^2 \\
\quad\quad\quad - 15v^3w^3 + 5v^5 \\
\hline
12m^5 - 9m^3n + 6m^3x^3 - 15m^3p + 9m^3vw^3 - 3m^3v^3 \\
\quad + 8m^2x^4 - 6nx^4 + 4x^7 - 10px^4 + 6vw^3x^4 - 2v^3x^4 \\
\quad - 20m^2v^2 + 15nv^2 - 10v^2x^3 + 25pv^2 - 15v^3w^3 + 5v^5
\end{array}
$$

Da in diesem Beispiele sich nichts aufheben oder ausgleichen läßt, so sind die Partialprodukte neben einander gesetzt.

10)

$$
\begin{array}{l}
x^2 - ax + bx + a^2 + b^2 + ab \\
3x + 3a - 3b \\
\hline
3x^3 - 3ax^2 + 3bx^2 + 3a^2x + 3b^2x + 3abx \\
\quad + 3ax^2 - 3a^2x + 3abx + 3a^3 + 3ab^2 + 3a^2b \\
\quad\quad - 3bx^2 + 3abx - 3b^2x - 3a^2b - 3b^3 - 3ab^2 \\
\hline
3x^3 + 9abx + 3a^3 - 3b^3
\end{array}
$$

In vorstehendem Beispiele heben sich vierzehn Partialprodukte gegenseitig auf, so daß im Hauptprodukte nur vier verschiedene Größen erscheinen.

Noch mehrere Beispiele über die Multiplication aufzustellen, würde überflüssig sein, da man aus diesen, wenn sie mehrmals wiederholt werden, sich eine ziemliche Fertigkeit erwerben kann.

Division in ungebrochenen Größen.

Da die Division der Multiplication geradezu entgegengesetzt ist, so findet hier auch eine entgegengesetzte Berechnung der gegebenen und zu dividirenden Größen statt. Nur in Betreff der Zeichen + und — gilt hier

dasselbe, was bei der Multiplication befolgt werden muß.

Anstatt daß bei der Multiplication die Buchstaben zusammengestellt, werden sie in der Division durch den Divisor vom Dividendus weggenommen. Z. B. $ax : a = x$; $bck : bc = k$ und $vwx : v = wx$.

Die Coefficienten werden ebenfalls dividirt, z. B. $12am : 3a = 4m$; $9kvx : 3kv = 3x$; $15axz : 5z = 3ax$.

Der Exponent des Divisors wird vom Exponent des Dividendus abgezogen. Z. B. $6a^5 : 2a^2 = 3a^3$; $10mv^4 : 2mv^2 = 5mv^2$; $36k^2w^3 : 6w^3 = 6k^2$.

Wie schon oben gesagt, gilt auch hier die Regel: gleiche Zeichen geben plus, und ungleiche minus, indeß wollen wir die vier Fälle hier hersetzen:

$$+ab : +a = +b$$
$$+ab : -a = -b$$
$$-ab : +a = -b$$
$$-ab : -a = +b$$

Hat man nun eine Reihe verschiedener Größen zu dividiren, so ordne man Dividend und Divisor wie nachstehende Beispiele zeigen. Man dividire nun erst die Coefficienten und dann die Buchstaben, multiplicire den Divisor mit dem Quotienten und ziehe diese Produkte vom Dividend ab; geht das Abziehen nicht, so wird die Dividende mit dem entgegengesetzten Zeichen zum Reste herab geschrieben.

Da die Buchstaben von ihrer Stelle nicht die Bedeutung wie Zahlen haben, und $+ ax$ einerlei Werth behält, es mag vorn, hinten oder in der Mitte stehen, so darf man sich hier nicht ängstlich an die Ord-

nung binden, daß alles nach der Reihe folgen müsse, und man kann den Quotienten nehmen, wo man ihn findet, und ebenso auch die Partialprodukte gegenseitig abziehen oder aufheben.

Nachstehende Beispiele werden das Verfahren deutlicher machen.

1)

$$\begin{array}{rl|l} 3a :) & 6ak + 3a^2 - 15ax & 2k + a - 5x \\ & +6ak + 3a^2 - 15ax & \\ & - \quad\quad - \quad\quad + & \\ \hline & 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 & \end{array}$$

Hier ist jede Größe einzeln dividirt; eben so im folgenden Beispiele.

2)

$$\begin{array}{rl|l} 3vw^2 :) & -21vw^5 - 9v^6w^2k - 27vw^2x & -7vw^3 - 3v^5k - \\ & -21vw^5 - 9v^6w^2k - 27vw^2x & -9x \\ & + \quad\quad + \quad\quad + & \\ \hline & 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 & \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{rl|l} 3x^2 :) & 15dx^2 - 9m^2x^2 - 6x^5 + 12x^2z & 5d - 3m^2 - 2x^3 + \\ & 15dx^2 - 9m^2x^2 - 6x^5 + 12x^2z & +4z \\ & - \quad\quad + \quad\quad + \quad\quad - & \\ \hline & 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 & \end{array}$$

4)

$$\begin{array}{rl|l} -3vw :) & -21a^4vw + 15v^2w - 9vw^2 - 36vw & 7a^4 - 5v + \\ & -21a^4vw + 15v^2w - 9vw^2 - 36vw & +3w + 12 \\ & + \quad\quad - \quad\quad + \quad\quad + & \\ \hline & 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 \quad\quad 0 & \end{array}$$

5)

$$
\begin{array}{l|l}
2b-4c:)\,2b^4-10b^3c+18b^2c^2-10bc^3-4c^4 & 6^3-3b^2c \\
\qquad\quad 2b^4-\ 4b^3c & +3bc^2+ \\
\qquad\quad -\quad + & +c^3 \\
\hline
\qquad\quad 0-6b^3c+18b^2c^2 & \\
\qquad\quad\ \ -6b^3c+12b^2c^2 & \\
\qquad\quad\ \ +\qquad - & \\
\hline
\qquad\qquad 0+6b^2c^2-10bc^3 & \\
\qquad\qquad\ \ +6b^2c^2-12bc^3 & \\
\qquad\qquad\ \ -\qquad + & \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0+2bc^3-4c^4 & \\
\qquad\qquad\quad\ \ +2bc^3-4c^4 & \\
\qquad\qquad\quad\ \ -\qquad + & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0\quad 0 &
\end{array}
$$

Im vorstehenden Beispiele befindet sich ein zweigliederiger Divisor, nämlich $+2b-4c$. Man sage daher 2 gegen 2 hebt sich, dann b in b^4 habe ich $+b^3$mal. Mit diesem Quotient $+b^3$ multiplicire man den ganzen Divisor $2b-4c$ unter die ersten Größen, so kommen die Produkte $+2b^4-4b^3c$. Diese ziehe man vom Dividend $2b^4-10b^3c$ ab, so bleibt $-6b^3c$. Zu diesem Reste schreibe die folgende Größe $+18b^2c^2$ herab, so besteht die Dividende wieder in $-6b^3c+18b^2c^2$. Man dividire nun wieder und sage: 2 in -6 habe ich -3mal und b in b^3c habe ich b^2cmal. Mit diesen Quotient $-3b^2c$ multiplicire man den ganzen Divisor und setze die Produkte $-6b^3c+12b^2c^2$ unter die Dividenden $-6b^3c+18b^2c^2$, und subtrahire wieder, so bleibt $+6b^2c^2$. Zu diesem Reste schreibe man die Größe $-10bc^3$ von oben herab, so hat man wieder die neue Dividende $+6b^2c^2-10bc^3$. Nun dividire man wieder und sage: 2 in 6 habe ich $+3$mal, und b in b^2c^2 habe ich bc^2mal. Mit diesem Quotient $+3bc^2$ mul=

tiplicire man den ganzen Divisor $+ 2b - 4c$, und setze die Produkte $+ 6b^2c^2 - 12bc^3$ unter die Dividende, subtrahire jene von diesen, so bleibt $+ 2bc^3$. Zu diesem Reste schreibe man endlich die letzte Größe $- 4c^4$ herab und sage: $+ 2b$ in $+ 2bc^3$ habe ich $+ c^3$ mal, und multiplicire diesen Quotienten mit dem Divisor, so wird sich ergeben, daß die Produkte sich gegen die Dividende aufheben.

Es ist gewiß ein äußerst seltener Fall, daß man in der Algebra so große Division zu machen hat, und daß sie auch gerade wie hier, ohne Rest aufgehen. Die hier gegebenen Beispiele sind dieselben, die ich in der Multiplication aufgetischt habe, und da man fast allgemein darüber klagt, daß zu wenig Uebungsbeispiele in den algebraischen Lehrbüchern angetroffen würden, so sollen noch mehrere hier vorgetragen werden.

6)

$$
\begin{array}{l|l}
a + b - c :) \; a^2 - b^2 + 2bc - c^2 & a - b + c \\
\quad a^2 + ab - ac & \\
\quad - \;\; - \;\; + & \\
\hline
\quad - ab + ac - b^2 & \\
\quad - ab + bc - b^2 & \\
\quad + \;\; - \;\; + & \\
\hline
\quad + ac - bc - c^2 & \\
\quad + ac + bc - c^2 & \\
\quad - \;\; - \;\; + & \\
\hline
\quad 0 - 2bc \;\; 0 &
\end{array}
$$

In diesem Beispiele bleiben zwar $- 2bc$ im Reste, allein da in der Dividende noch $+ 2bc$ stehen, so heben sich beide Größen gegenseitig auf.

7)
$$
\begin{array}{l}
2a + 3b - 4c :)\ 12a^2 + 10ab - 30ac - 12b^2 - 6ac + 16bc + 12c^2 \mid 6a - 4b - 3c \\
\qquad\qquad\quad 12a^2 + 18ab - 24ac \\
\qquad\qquad\quad - \quad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0 - 8ab - 6ac - 12b^2 \\
\qquad\qquad\quad\ \ - 8ab - 12b^2 + 16bc \\
\qquad\qquad\quad\ \ + \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 - 6ac - 16bc - 6ac \\
\qquad\qquad\qquad\ \ - 6ac - 9bc + 12c^2 \\
\qquad\qquad\qquad\ \ + \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

8)
$$
\begin{array}{l}
5x + 2y :)\ 35x^2 - xy - 20xz - 6y^2 - 8yz \mid 7x - 3y - 4z \\
\qquad\qquad 35x^2 + 14xy \\
\qquad\qquad - \quad - \\
\hline
\qquad\qquad 0 - 15xy - 20xz \\
\qquad\qquad\ \ - 15xy - 6y^2 \\
\qquad\qquad\ \ + \quad + \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0 - 20xz - 8yz \\
\qquad\qquad\quad\ \ - 20xz - 8yz \\
\qquad\qquad\quad\ \ + \quad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 \quad 0
\end{array}
$$

9) $2x + az :)\ 12x^2 - 2axz - 6x^3y + 2x - 4a^2z^2 - 3ax^2yz + az \mid 6x - 4az - 3x^2y + 1$

$$
\begin{array}{l}
12x^2 + 6axz \\
- \quad - \\
\hline
0 \quad - 8axz - 6x^3y \\
\quad - 8axz - 4a^2z^2 \\
\quad + \quad + \\
\hline
\quad 0 \quad - 6x^3y + 2x \\
\quad\quad - 6x^3y - 3ax^2yz \\
\quad\quad + \quad + \\
\hline
\quad\quad 0 \quad + 2x + az \\
\quad\quad\quad + 2x + az \\
\quad\quad\quad - \quad - \\
\hline
\quad\quad\quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

10) $3a+3b-3k :)\ 6a^3-3abd+3ab^2+6a^2b-3b^2d+3b^3-6a^2k+3bdk-3b^2k \mid 2a^2-bd+b^2$

$$
\begin{array}{l}
6a^3+6a^2b-6a^2k \\
- \quad - \quad + \\
\hline
0 \ -3abd+3ab^2-3b^2d \\
\quad -3abd+3bdk-3b^2d \\
\quad + \quad - \quad + \\
\hline
\quad 0 \ +3ab^2+3b^3-3b^2k \\
\quad\quad +3ab^2+3b^3-3b^2k \\
\quad\quad - \quad - \quad + \\
\hline
\quad\quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}
$$

Wir wollen nur noch ein Paar größere Beispiele, und zwar diejenigen, welche in der Multiplication unter 9) und 10) berechnet sind, vortragen.

11) $3m^3+2x^4-5v^2:)$

$$:)12m^5-9m^3n+6m^3x^3-15m^3p+9m^3vw^3-3m^3v^3+8m^2x^4-6nx^4+4x^7-10px^4+6vw^3x^4-2v^3x^4 -20m^2v^2+15nv^2-10v^2x^3+25pv^2-15v^3w^3+5v^5 \;\Big|\; 4m^2-3n+2x^3-5p+3vw^3-v^3$$

$$12m^5+8m^2x^4-20m^2v^2$$
$$- \quad - \quad +$$
$$0 \quad -9m^3n+6m^3x^3-15m^3p$$
$$-9m^3n-6nx^4+15nv^2$$
$$+ \quad + \quad -$$
$$0 \quad +6m^3x^3-15m^3p+9m^3vw^3$$
$$+6m^3x^3+4x^7-10v^2x^3$$
$$- \quad - \quad +$$
$$0 \quad -15m^3p+9m^3vw^3-3m^3v^3$$
$$-15m^3p-10px^4+25pv^2$$
$$+ \quad + \quad -$$
$$0 \quad +9m^3vw^3-3m^3v^3+6vw^3x^4$$
$$+9m^3vw^3+6vw^3x^4-15v^3w^3$$
$$- \quad - \quad +$$
$$0 \quad -3m^3v^3-2v^3x^4+5v^5$$
$$-3m^3v^3-2v^3x^4+5v^5$$
$$+ \quad + \quad -$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

Und nun noch eins zum Schlusse der Division algebraischer Größen.

12)

$$3x + 3a - 3b\ ;)\ 3x^3 + 9abx + 3a^3 - 3b^3 \ \big|\ x^2 - ax + bx + a^2 + b^2 + ab$$

$$\begin{array}{l}
3x^3 + 3ax^2 - 3bx^2 \\
- \quad - \quad + \\
\hline
0 - 3ax^2 + 3bx^2 + 9abx \\
\quad - 3ax^2 - 3a^2x + 3abx \\
\quad + \quad + \quad - \\
\hline
0 + 3bx^2 + 3a^2x + 6abx \\
\quad + 3bx^2 - 3b^2x + 3abx \\
\quad - \quad + \quad - \\
\hline
0 + 3a^2x + 3abx + 3b^2x \\
\quad + 3a^2x + 3a^3 - 3a^2b \\
\quad - \quad - \quad + \\
\hline
0 + 3b^2x + 3abx + 3a^2b \\
\quad + 3b^2x + 3ab^2 - 3b^3 \\
\quad - \quad - \quad + \\
\hline
0 + 3abx + 3a^2b - 3ab^2 \\
\quad + 3abx + 3a^2b - 3ab^2 \\
\quad - \quad - \quad + \\
\hline
\quad 0 \quad 0 \quad 0
\end{array}$$

Noch mehre Beispiele zu geben, würde vergeblich sein, da man sich aus obigen zureichend üben und die erforderliche Fertigkeit im Dividiren erwerben kann. Hat

man solche Größen zu dividiren, welche nicht aufgehen, so setzt man sie in Form eines Bruches an. Z. B. wenn $5a^3 - 2k^2 + 6m^5$ durch $4b^2 - x$ dividirt werden sollte, so setzt man $\frac{5a^3 - 2k^2 + 6m^5}{4b^2 - x}$. Am allerhäufigsten treffen sich solche Fälle, und dann verfährt man am besten, sie, im Fall gar keine Verkleinerung oder Abkürzung statt findet, in Bruchform zu stellen.

IV.

Die vier Rechnungsarten mit algebraischen Brüchen.

Ebendieselben Regeln, welche in der Arithmetik bei Berechnung der Zahlenbrüche angewendet werden, finden auch hier statt, da die Zeichen, womit man die Größen ausdrückt, im Wesentlichen derselben durchaus nichts abändern. Der Bruch bleibt immer dasselbe und ist stets von derselben Beschaffenheit, es mögen Zähler und Nenner aus Zahlen oder Buchstaben bestehen, so gelten auch hier alle jene Gesetze, die in den Zahlenbrüchen geregelt sind. Nur die Eintheilung in eigentliche und uneigentliche fällt deshalb in der Algebra fast ganz weg, weil man nicht immer entscheiden kann, ob der Zähler größer als der Nenner, oder ob dies der umgekehrte Fall ist.

Neben den vier Rechnungsarten, die auf Brüche eben sowohl als auf ganze Größen angewendet werden, lassen sich die Buchstabenbrüche öfters auch abkürzen oder verkleinern und der Werth derselben in Unterabtheilungsbenennungen ausdrücken. Da dieser Gegenstand sowohl in der Arithmetik als hauptsächlich in der Algebra von bedeutendem Nutzen ist, so soll in Nachstehendem Einiges darüber verhandelt werden.

Hat man z. B. ein gemeinschaftliches Maß, wodurch der Zähler sowohl, als der Nenner, sich abkürzen lassen, so thue man dies. Der Bruch $\frac{ab-k}{mb}$ läßt sich durch b abkürzen, nämlich $\frac{a-k}{m}$. Denn im ersten Blick sieht man, daß b sich gegenseitig aufhebt. Mit den Coefficienten ist dies vorkommenden Falls ebenfalls anwendbar, denn $\frac{5x}{15m}=\frac{x}{3m}$, da 5 das Abkürzungsmaß ist. Aus folgenden Beispielen wird man das Verfahren ganz übersehen können.

$$\frac{12k^3}{18m} \overset{6}{=} \frac{2k^3}{3m} \qquad \frac{3x^4v}{7x^4} \overset{x^4}{=} \frac{3v}{7} \qquad \frac{17a^5y}{19y^3} \overset{y}{=} \frac{17a^5}{19y^2}$$

$$\frac{12np^3+21k}{9wv-33x} \overset{3}{=} \frac{4np^3+7k}{3wv-11x} \qquad \frac{5b^3m-3mz}{6m^4+8mk} \overset{m}{=} \frac{5b^3-3z}{6m^3+8k}$$

$$\frac{8bw^2-24w^2a+36w^3}{32w^2y+8w^2-32w^6} \overset{4w^2}{=} \frac{2b-6a+9w}{8y+2-8w^4}$$

In Betreff der Unterabtheilungsbenennungen noch Folgendes. Wenn $\frac{a}{b}$ einen Thalerbruch vorstellt, und er soll in einen Groschenbruch verwandelt werden, so multiplicire man den Zähler mit 24, und man hat $\frac{24a}{b}$. Will man den Centnerbruch $\frac{4k}{11v}$ in einen Pfundbruch umschaffen, so multiplicirt man den Zähler mit so viel Pfunden, als der Centner enthält, hier z. B. mit 110; folglich hat man $\frac{440k}{11v} \overset{11}{\smile} = \frac{40k}{v}$.

Auch werden Brüche von mehrgliederichten Zählern auf dieselbe Art behandelt, indem der ganze Zähler mit der Unterabtheilungszahl multiplicirt wird. Z. B. $\frac{3a-4m}{9x}$ Thaler gibt in Silbergroschen à 30

$$\frac{3a-4m \times 30}{9x} = \frac{90a-120m}{9x} \overset{3}{\smile} = \frac{30a-40m}{3x} \overset{3}{\smile} = \frac{10a-40m}{x}$$

Addition der algebraischen Brüche.

Hier eben so wie in der Mathematik gilt die Regel, daß, wenn die Brüche gleiche oder einerlei Nenner haben, man blos ihre Zähler addirt; haben sie aber ungleiche oder verschiedene Nenner, so wird durch Multiplication derselben ein Generalnenner gesucht, und mit diesem eben so verfahren, wie es bei Zahlenbrüchen geschieht. Lassen sich die addirten Brüche nicht abkürzen oder in ganze Größen verwandeln, so werden sie in der

Summe wieder als ein Bruch angesetzt. Nachstehende Beispiele werden das Verfahren deutlicher machen.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad}^{4k}} \\ \frac{5a}{4k} & 5a \\ \frac{3m}{4k} & 3m \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\frac{5a+3m}{4k}} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad}^{v}} \\ \frac{m}{v} & m \\ \frac{k}{v} & k \\ \frac{z}{v} & z \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\frac{m+k+z}{v}} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad}^{bdmx}} \\ \frac{a}{b} & admx \\ -\frac{c}{d} & cbmx \\ \frac{k}{m} & kbdx \\ -\frac{n}{x} & nbdm \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\frac{admx-cbmx+kbdx-nbdm}{bdmx}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad}^{bcdm}} \\ \frac{a}{bc} & adm \\ \frac{k}{dm} & kbc \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\frac{adm+kbc}{bcdm}} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad}^{xz2c}} \\ \frac{3w}{4x} & 15zw \\ -\frac{2v}{5z} & -8vx \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\frac{15wz-8vx}{20xz}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad}^{40bv^4}} \\ \frac{2ak}{5bv^2} & 16akbv \\ -\frac{3mn}{8bv^2} & -15mnbv^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{16akbv^2-15mnbv}{40bv^4} \overset{bv^2}{=} \frac{16ak-15mn}{40bv^2}$$

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad}^{10xyz^2}} \\ \frac{3x}{2xy} & 15xz^2 \\ \frac{4y}{5z^2} & 8xy^2 \end{array}$$

$$\frac{15xz^2+8y^2x}{10xyz^2} \overset{xz^2}{=} \frac{15+8y^2x}{10y} \overset{y}{=} \frac{15+8yx}{10}$$

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad}^{d-1}} \\ \frac{3x+5}{d-1} & 3x+5 \\ \frac{7-x}{d-1} & 7-x \end{array}$$

$$\frac{3x+5+7-x}{d-1} = \frac{2x+12}{d-1}$$

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad}^{9bm}} \\ \frac{10a}{b} & 90am \\ \frac{6d^2}{9m} & 6d^2b \end{array}$$

$$\frac{90am+6d^2b}{9bm} \overset{9}{=} \frac{10am+6d^2b}{bm}$$

$$\begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad}^{2hkxz}} \\ \frac{9c}{hk} & 18cxz \\ \frac{4d}{2x} & 4dhkz \\ \frac{7}{z} & 14hkx \end{array}$$

$$\frac{18cxz+4dhkz+14hkx}{2hkxz} \overset{2}{=} \frac{9cxz+2dhkz+7hkx}{hkxz}$$

$$\frac{a^3-3f}{9k}\;\Big|\;2a^3d^2+4a^3m^3-6d^2f-12fm^3$$
$$\frac{6m-3}{2d^2+4m^3}\;\Big|\;54km-27k$$
(common denominator: $18d^2k+36km^3$)

$$\frac{2a^3d^2+4a^3m^3-6d^2f-12fm^3+54km-27k}{18d^2k+36km^3}$$

$$\frac{5n+cd^2}{4h-8}\;\Big|\;10nv+2cd^2v-5nz-cd^2z$$
$$\frac{8b^3-xy}{2v-z}\;\Big|\;32b^3h-4hxy-64b^3+8xy$$
(common denominator: $8hv-16v-4hz+8z$)

$$\frac{10nv+2cd^2v-5nz-cd^2z+32b^3h-4hxy-64b^3+8xy}{8hv-16v-4hz+8z}$$

Aus obigen berechneten zwölf Beispielen wird jeder Anfänger das Verfahren sehr leicht gefaßt haben. Noch mehr Uebungsbeispiele vorzutragen, würde unnöthig sein. Wir schreiten daher zur

Subtraction algebraischer Brüche.

Da in dieser Rechnungsart dasselbe Verfahren angewendet wird, wie bei gemeinen Zahlenbrüchen, so bedarf es weiter keiner Erklärung. Haben die Brüche einerlei Nenner, so subtrahirt man die abzuziehenden Zähler, und läßt sich dies wegen Verschiedenheit der Größen nicht bewirken, so setzt man sie in Bruchform an. Gar nicht viel schwieriger ist das Geschäft, wenn die Nenner ganz verschieden sind, hier werden sie, wie bei der Addition, erstlich unter einerlei Benennung ge-

bracht, und dann subtrahirt. Hierbei ist aber genau zu merken, daß im Zähler des Subtrahends, wenn er mehrgliederig ist, die entgegengesetzten Zeichen gelten. Z. B.

$$\begin{array}{c|l} & \overbrace{\qquad\quad}^{d+x} \\ \frac{12a^2-5}{d+x} & 12a^2-5 \\ \frac{3b^3+2m}{d+x} & 3b^3+2m \\ & \quad - \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\frac{12a^2-5-3b^3-2m}{d+x}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} & \overbrace{\qquad\qquad}^{12vx^2-8x^2} \\ \frac{11k^3}{3v-2} & 44k^3x^2 \\ \frac{d^2}{4x^2} & 3d^2v-2d^2 \\ & \qquad\;\; + \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\frac{44k^3x^2-3d^2v+2d^2}{12vx^2-8x^2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} & \overbrace{\qquad}^{x+3z} \\ \frac{2a-m}{x+3z} & 2a-m \\ \frac{m-z}{x+3z} & m-z \\ & \quad + \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\frac{2a-m-m+z}{x+3z}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} & \overbrace{\qquad}^{7ay^2} \\ \frac{9k^2w}{7a} & 9k^2wy^2 \\ \frac{3vx}{y^2} & 21avx \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\frac{9k^2wy^2-21avx}{7ay^2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|l} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{7p-3cp-7v+3cv} \\ \frac{2ab}{7-3c} & 2abp-2abv \\ \frac{6k-2m^3}{p-v} & 42k-14m^3-18ck+6cm^3 \\ & \qquad\;\; + \qquad\;\; + \qquad\; - \\ \hline \end{array}$$

$$= \frac{2abp-2abv-42k+14m^3+18ck-6cm^3}{7p-3cp-7v+3cv}$$

$$\begin{array}{c|l} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{m^2y-m^2y^2+xy-xy^2} \\ \frac{3x-1}{y-y^2} & 3m^2x+3x^2-m^2-x \\ \frac{1}{m^2+x} & +y-y^2 \\ & -\quad + \\ \hline \end{array}$$

$$= \frac{3m^2x+3x^2-m^2-x-y+y^2}{m^2y-m^2y^2+xy-xy^2}$$

Auch hier würde es vergeblich sein, noch mehrere Beispiele vorzutragen, da diese schon genügen, dem Anfänger eine ziemliche Fertigkeit im Subtrahiren zu verschaffen.

Multiplication algebraischer Brüche.

Ebenso wie in der Arithmetik, gilt auch hier die Regel, daß man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt, und beide Produkte nach ihrer Ordnung wieder in einen Bruch formirt. Eine weitere Erläuterung ist hier nicht erforderlich, da nachstehende Beispiele das ohnehin leichte Verfahren anschaulicher machen.

$$\frac{4a^3}{5b} \times \frac{3a^2}{8k^3x} = \frac{12a^5}{40bk^3x} \qquad \frac{4m^4x}{7w^2} \times \frac{2m^2}{4w^3y} = \frac{8m^6x}{28w^5y}$$

$$\frac{4a-b}{2x+y} \times \frac{d^2-k}{1-c^2} = \frac{4ad^2-4ak-bd^2+bk}{2x-y-2c^2x-c^2y}$$

$$\frac{a^2x^4}{12mp} \times \frac{15a}{nx} = \frac{15a^3x^4}{12mpnx} \overset{x}{=} \frac{15a^3x^3}{12mpn} \overset{3}{=} \frac{5a^3x^3}{4mpn}$$

$$\frac{a+b}{b+c} \times \frac{b-c}{d+c} = \frac{ab+b^2-ac-bc}{bd+cd+bc+c^2}$$

$$\frac{3k-x}{2m^3} \times \frac{5m+x^2}{3m^2-v} = \frac{15km-5mx+3kx^2-x^3}{6m^5-2m^3v}$$

Wer sich mehr im Multipliciren algebraischer Brüche üben will, kann sich die Beispiele selbst machen.

Division algebraischer Brüche.

Auch hier wird dieselbe Regel wie in der Arithmetik bei Zahlenbrüchen angewendet, nämlich: man multiplicire den Zähler des Dividends durch den Nenner des Divisors und setze das Produkt wieder als Zähler; hierauf multiplicire man ferner den Nenner des Dividends durch den Zähler des Divisors und setze dies Produkt unter jenes als Nenner. Kann man den hierdurch entstandenen neuen Bruch durch einerlei Maß verkleinern, so muß man dies nicht unterlassen, indem dadurch eine vortheilhafte Abkürzung bewirkt wird. Kommen ungebrochene Größen mit in Rechnung, so verwandelt man diese dadurch in einen Bruch, daß man eine 1 als Nenner darunter stellt.

$$\frac{a}{c} : \frac{a}{b} = \frac{ac}{ab} \overset{a}{=} \frac{c}{b} \qquad \frac{c}{d} : \frac{ab+c}{b} = \frac{abd+cd}{cb}$$

$$\frac{a+b}{b-a} : \frac{c+d}{b-c} = \frac{cb+bd-ac-bc}{ab+b^2-ac-bc} \qquad \frac{3k}{4m} : \frac{2x}{5a} = \frac{8mx}{15ak}$$

$$\frac{de}{b} : \frac{a}{bc} = \frac{ab}{bcde} = \frac{a}{cde} \qquad \tfrac{1}{3} : \frac{a}{b} = \frac{3a}{b} \qquad 1\tfrac{1}{2} : \frac{a}{b} = \frac{2a}{3b}$$

$$\frac{v}{w} : 1\tfrac{1}{3} = \frac{4w}{3v} \qquad 4 : \frac{2y}{3z} = \frac{2y}{12z} \overset{2}{=} \frac{y}{6z}$$

$$\frac{9m}{2w-5x} : 6 = \frac{12w30x}{9m} \overset{3}{=} \frac{4w-10x}{3m}$$

$$\frac{b+d}{k+x} : \frac{a+c}{z-y} = \frac{ak+ck+ax+cx}{bz-by+dz-dy}$$

$$\frac{2a}{6m} : \frac{5b}{3k^2} = \frac{30bm}{6ak^2} \overset{6}{=} \frac{5bm}{ak^2} \qquad \frac{3c^2}{d} : \frac{15m}{7x} = \frac{15dm}{21c^2x} \overset{3}{=} \frac{5dm}{7c^2x}$$

$$\frac{5a-3a^2}{m+9x} : \frac{1-8y}{6m+x} = \frac{m+9x-8my-72xy}{30am-18a^2+5ax-3a^2x}$$

$$2m+y : \frac{b^3-b}{3a+1} = \frac{b^3-b}{6am+2m+3ay+y}$$

$$\frac{k}{3a^2} : \frac{3k^2}{wz} = \frac{9a^2k^2}{kwz} \overset{k}{=} \frac{9a^2k}{wz}$$

Durch diese Beispiele ist zureichend gezeigt worden, wie man bei der Division der gebrochenen Größen zu verfahren hat. Ehe wir jedoch zu den Gleichungen schreiten, muß noch Einiges über das Quadriren und Cubiren der Größen verhandelt werden.

V.

Von den Quadrat- und Cubikgrößen, oder die Potenz- und Würdenlehre.

Eine Größe oder Zahl quadriren, heißt: sie mit sich selbst multipliciren; das Produkt ist ihr Quadrat und sie selbst ist dessen Wurzel. Eine Größe oder Zahl

cubiren, heißt, sie und ihr Quadrat mit einander multipliciren; das Produkt ist ihr Cubus und sie selbst dessen Wurzel. Die Quadratwurzel aus einer Größe oder Zahl berechnen, heißt eine Größe oder Zahl suchen, deren Quadrat ihr gleich ist. Die Cubikwurzel aus einer Größe oder Zahl berechnen, heißt, eine Größe oder Zahl suchen, deren Cubus ihr gleich ist. Das Berechnen der Quadratwurzel wird durch das Zeichen $\sqrt{\ }$ oder $\sqrt[2]{\ }$, und das der Cubikwurzel durch $\sqrt[3]{\ }$ angedeutet.

Einfache Größen oder Zahlen haben einfache Wurzeln, und diese lassen sich leicht und ohne Berechnung ausziehen. Z. B. aus a^2 ist die Quadratwurzel a; aus m^3 ist die Cubikwurzel m. Aus 9 ist die Quadratwurzel 3, und aus 8 ist die Cubikwurzel 2.

Je größer und mehrtheiliger die Größen und Zahlen sind, desto größer und mehrtheiliger sind ihre Wurzeln, und um so schwieriger das Berechnen oder Ausziehen derselben. Man quadrire z. B. $a + x$ und $30 + 5$.

$a + x$	$30 + 5$
$a + x$	$30 + 5$
$a^2 + ax$	$900 + 150$
$+ ax + x^2$	$+ 150 + 25$
$a^2 + 2ax + x^2$ Quadrat.	$900 + 300 + 25$ Quadrat.
$a + x$	$30 + 5$
$a^3 + 2a^2x + ax^2$	$27000 + 9000 + 750$
$+ a^2x + 2ax^2 + x^3$	$+ 4500 + 1500 + 125$
$a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$ Cubus.	$27000 + 13500 + 2250 + 125$ Cubus.

Daß das Quadrat einer jeden zweitheiligen Wurzel aus dem Quadrate eines jeden Theils und aus dem doppelten Produkte der beiden Theile besteht, zeigt sich sowohl

in dem Buchstaben- als auch Zahlenquadrate. Wie daher der erste Wurzeltheil die Wurzel eines einfachen Quadrats ist, so wird der zweite Wurzeltheil gefunden, wenn man das doppelte Produkt seiner beiden Theile durch das Duplum des ersten Theils dividirt, und das Quadrat des Quotienten nebst dem Produkte des Divisors und Quotienten vom Reste des ganzen Quadrats abzieht. Nämlich:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{\;} a^2 + 2ax + x^2 & a + x \text{ Wurzel} \\
a \times a = a^2 \qquad\qquad & \\
\hline
0 \;+ 2ax + x^2 & \\
2 \times a = 2a : \Big\} + 2ax + x^2 & \\
\text{und } x \times 2a \text{ und } x \Big\} - \qquad - & \\
\hline
0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

Eben so berechne man die Wurzel aus dem Zahlenquadrate

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{\;} 900 + 300 + 25 & 30 + 5 \text{ Wurzel} \\
30 \times 30 = 900 \qquad\qquad & \\
\hline
0 \;+ 300 + 25 & \\
2 \times 30 = 60 : \qquad\qquad\quad & \\
5 \times 60 = + 300 \qquad & \\
- \qquad\quad & \\
5 \times 5 = \;\; + 25 & \\
- & \\
\hline
0 \qquad 0 &
\end{array}
$$

Daß der Cubus einer zweitheiligen Wurzel aus dem Cubus eines jeden Theils, aus dem dreifachen Produkte des zweiten mit dem Quadrate des ersten, und des ersten mit dem Quadrate des zweiten Theils besteht, ergibt sich sowohl in dem Zahlen- als Buchstabencubus. Wie demnach der erste Wurzeltheil die Wurzel eines einfachen Cubus ist, so wird der zweite Wurzeltheil gefun-

den, wenn man den zweiten Theil des Cubus durch das dreifache Quadrat seines ersten Wurzeltheils dividirt, alsdann sowohl das Quadrat des Quotienten mit dem dreifachen ersten Wurzeltheile, als den Divisor mit dem Quotienten multiplicirt, den zweiten Wurzeltheil cubirt, und die beiden Produkte nebst dem Cubus vom Reste des ganzen Cubus abzieht. Nämlich:

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3} \;\Big|\; a + x \text{ Wurzel}$$
$$a \times a \times a = a^3$$
$$0 + 3a^2x$$
$$a \times a \times 3 = 3a^2 :$$
$$x \times 3a^2 = \underset{-}{+} 3a^2x$$
$$0 + 3ax^2$$
$$x \times x \times a \times 3 = \underset{-}{+} 3ax^2$$
$$0 + x^3$$
$$x \times x \times x = + x^3$$
$$0$$

Ebenso berechne man auch die Wurzel aus dem Zahlencubus.

$$\sqrt[3]{27000 + 13500 + 2250 + 125} \;\Big|\; 30 + 5 \text{ Wurzel.}$$
$$20 \times 30 \times 30 = 27000$$
$$0 + 13500$$
$$30 \times 30 \times 3 = 2700 :$$
$$5 \times 2700 = \underset{-}{+} 13500$$
$$0 + 2250$$
$$5 \times 5 \times 30 \times 3 = \underset{-}{+} 2250$$
$$0 + 125$$
$$5 \times 5 \times 5 = + 125$$
$$0$$

Durch jeden hinzugefügten Wurzeltheil wird die Multiplication des Quadrirens und Cubirens wiederholt, und durch jede wiederholte Vervielfältigung verbinden sich die ersten Wurzeltheile gleichsam zu einem Theile; und sonach bleibt sich das Verfahren des Wurzelausziehens, im Betreff eines jeden neuen Wurzeltheils wesentlich gleich. Die Wurzel eines Buchstabenquadrats oder Cubus besteht aus so vielen Theilen, als Arten Buchstaben das Quadrat oder der Cubus enthält.

Da man durch das Ausziehen der Quadratwurzel eine mit sich selbst vervielfältigte Zahl findet, so muß eine jede Quadratzahl wenigstens zweimal so viel Ziffern, als ihre Wurzel, weniger eine Ziffer, enthalten; und daher theilt man die Ziffern einer Zahl zur Ausziehung der Wurzel, wenn sie mehr als zwei Ziffern enthält, dergestalt von der rechten gegen die linke Hand in Klassen ab, daß, bis auf die letzte Klasse zur linken Hand, jede Klasse zwei Ziffern erhält.

Da man ferner durch das Ausziehen der Cubikwurzel eine mit ihrem Quadrat vervielfältigte Zahl findet, so muß eine Cubikzahl wenigstens dreimal so viel Ziffern enthalten, als ihre Wurzel, weniger eine oder zwei Ziffern; und daher theilt man die Ziffern einer Zahl zur Ausziehung der Cubikwurzel, wenn sie aus mehr als drei Ziffern besteht, dergestalt von der rechten gegen die linke Hand in Klassen ab, daß, bis auf die letzte zur linken Hand, drei Ziffern in jede Klasse kommen. Einige Beispiele hierüber:

$$\sqrt{}\ 4k^2 - 4km + m^2 + 20kn - 10mn + 25n^2 \quad | \; 2k - m + 5n \text{ Wurzel}$$

$$4k^2$$

$$-$$

$$0 \quad -4km + m^2$$

$$4k \times -m \text{ und } m \times m = -4km + m^2$$

$$+ \quad -$$

$$+20kn - 10mn + 25n^2$$

$$4k - 2m \times 5n \text{ und } 5n \times 5n = +20kn - 10mn + 25n^2$$

$$- \quad + \quad -$$

Und nun auch ein Beispiel aus einer Zahl.

$\sqrt{}$ 6,14,99,04,01 | 24799 Wurzel.

4

214
44
176

3899
487
3409

49004
4949
44541

446301
49589
446301

0

Man ziehe nnn auch die Cubikwurzel aus folgenden Buchstabengrößen:

$$\sqrt[3]{x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3-9x^2z-36xyz-36y^2z+27xz^2+54yz^2-27z^3} \quad \Big| \quad x+2y-3z=$$

Wurzel.

$$x \times x \times x = x^3$$

$$0$$

I. $3x^2 \times 2y = +6x^2y$

$$0$$

$$2y \times 2y \times x \times 3 = \underset{-}{+}12xy^2$$

$$0$$

$$2y \times 2y \times 2y = \underset{-}{+}8y^3$$

$$0$$

II. $3x^2+12xy+12y^2 \times -3z = -9x^2z-36xyz-36y^2z$

$$+$$

$$0$$

$$-3z \times -3z \times (x+2y) \times 3 = \underset{-}{+}27xz^2+54yz^2$$

$$0$$

$$-3z \times -3z \times -3z = \overset{}{-}27z^3$$

$$+$$

$$0$$

Um den Anfänger mehr zum Nachdenken anzutreiben, habe ich in diesem Beispiele die Divisoren nicht vorgesetzt, sie bestehen aber bei I. in $x \times x \times 3 = 3x^2$ in $6x^2y$ habe ich $2y$ mal, und bei II. in $x + 2y \times x + 2y \times 3 = 3x^2 + 12xy + 12y^2$ in $9x^2z - 36xyz - 36y^2z$ habe ich $3z$ mal. Wie die Produkte entstanden, ist schon oben erklärt worden.

Bei den Buchstabengrößen läßt sich das Verfahren des Wurzelausziehens leichter überblicken, und die Berechnung schneller durchsetzen, als bei Zahlen. Wir wollen nun auch noch ein Beispiel vortragen, das die Cubikwurzel in Zahlen auszieht.

$\sqrt[3]{}$	26,838,323,784	2994 Wurzel.
$2 \times 2 \times 2 =$	8	
	18838	
$2 \times 2 \times 3 =$	12	
$12 \times 9 =$	108	
$9 \times 9 \times 3 \times 2 =$	486	
$9 \times 9 \times 9 =$	729	
	16389	
	2449323	
$29 \times 29 \times 3 =$	2523	
$2523 \times 9 =$	22707	
$9 \times 9 \times 29 =$	7047	
$9 \times 9 \times 9 =$	729	
	2341899	
	107424784	
$299 \times 299 \times 3 =$	268203	
	1072812	
$4 \times 4 \times 3 \times 299 =$	14352	
$4 \times 4 \times 4 =$	64	
	107324784	
	0	

Aus diesem Beispiele sieht man, wie verfahren werden muß, um die Wurzel aus einer Cubikzahl zu ziehen. Die Wurzeln vollständiger Cubikzahlen, welche nicht über eine Million reichen, lassen sich schon durch den bloßen Ueberblick berechnen. Man theile nur die Zahl in Gedanken in zwei Klassen, so sieht man bald, welcher Cubus sich von der ersten Klasse linker Hand abziehen läßt, und sonach hat man die erste Wurzelziffer. Hierauf überlege man, welche Endziffer der Rest und die andere Klasse auswerfen werden. Z. B. die Zahl 32,768. Hier besteht die Wurzel der ersten Klasse aus 3, mithin der Cubus aus 27. Die Endziffer in der folgenden Klasse entspricht keinem andern Cubus als 8, folglich muß die Wurzel 32 sein.

VI.

Grundsätze zur Anstellung, Bildung und Auflösung algebraischer Gleichungen.

Da die Algebra alle ihr gehörigen Aufgaben durch Gleichungen berechnet, so verdient dieser Gegenstand die strengste Aufmerksamkeit dessen, der erwünschte Fortschritte in dieser Wissenschaft zu machen denkt.

Unter Gleichung versteht man im Allgemeinen einen doppelten Ausdruck ein und derselben Größe. Nun hat man aber zweierlei Arten von Gleichungen, nämlich identische, d. h. solche, die zwar im Ausdrucke verschieden, aber ganz von einerlei Sinne sind, dann algebraische im strengern Sinne. Identische Ausdrücke oder Gleichungen in minder strengem Sinne sind solche, wo der Grund der Gleichheit in den dabei angebrachten Rechnungsarten liegt. So sind z. B. $8 = \frac{16}{2}$, oder $4 \times 4 = 16$, oder $5 + 7 = 15 - 3$ keine eigentlichen Gleichungen, weil in der ersten die Division, in der zweiten die Multiplication und in der dritten die Addition und Subtraction den Grund der Gleichheit enthält. Liegt dagegen der Grund der Gleichheit in dieser oder jener Bedingung irgend einer Aufgabe, oder in einem erwiesenen Lehrsatze, alsdann hat man eine eigentliche algebraische Gleichung. Es verlangt z. B. Jemand eine Zahl, deren Hälfte um 12 größer als ihr dritter Theil ist, so läßt sich diese Bedingung sehr gut durch diese Gleichung ausdrücken: $\frac{x}{2} - 12 = \frac{x}{3}$. In einer Gleichung heißen die einander gleich stehenden Größen, sie mögen ein- oder mehrgliedericht sein, die Seiten derselben. Am allerbegreiflichsten kann man sich jede Gleichung durch eine Wage vorstellen, wo das Gleichheitszeichen = den Wagebalken, und die zwei Seiten die mit gleicher Last beschwerten Schaalen bedeuten. Jede algebraische Gleichung enthält wenigstens eine, wo nicht mehre unbekannte Größen, deren positiver Werth gesucht oder bestimmt werden soll. Dies zu be-

werkstelligen, muß die unbekannte Größe auf der einen Seite herausgeschafft werden, so daß sich auf dieser Seite nur bekannte Größen befinden, wodurch die Gleichheit im geringsten nicht gestört wird. Dies Verfahren nennt man eine Gleichung ausführen.

Die Mittel, welche man anwenden muß, unbekannte Größen von bekannten in einer Gleichung zu befreien, wird in folgenden Grund- und Lehrsätzen mitgetheilt.

1)

Sind mehrere Größen sich gleich, und addirt man zu einer jeden eine und dieselbe Größe, so sind sich auch die Summen gleich.

2)

Sind mehrere Größen sich gleich, und subtrahirt man von einer jeden eine und dieselbe Größe, so sind auch die Reste gleich.

3)

Sind mehrere Größen sich gleich, und multiplicirt man eine jede mit einer und derselben Größe, so sind sich die Produkte auch gleich.

4)

Sind mehrere Größen sich gleich, und dividirt man eine jede durch eine und dieselbe Größe, so sind sich die Quotienten auch gleich.

5)

Sind mehrere Größen sich gleich, und quadrirt man eine jede, so sind ihre Quadrate auch gleich.

6)

Sind mehrere Quadrate sich gleich, so sind ihre Wurzeln auch gleich.

7)

Sind mehrere Größen sich gleich, und cubirt man eine jede, so sind ihre Cubusse auch gleich.

8)

Sind mehrere Cubusse sich gleich, so sind ihre Wurzeln auch gleich.

9)

Ist eine jede von mehrern Größen gleich einer und derselben andern Größe, so sind sich alle Größen dieser Mehrheit gleich.

10)

Eine jede Größe ist ihren Theilen gleich. Die Theile einer Größe sind zusammen ihr selbst gleich.

11)

Sind zwei verschieden bezeichnete Größen sich am Inhalte gleich, so kann die eine statt der andern gerechnet werden, und dies nennt man substituiren. Ist z. B. $m + n = 24$, und $n = 1\frac{1}{2}m$, so läßt sich n durch $1\frac{1}{2}m$ substituiren, und durch diese Substitution bekommt man folgende Gleichung:

$m+1\frac{1}{2}m=24$, oder $2\frac{1}{2}m=24$, oder $5m=48$, oder $m=9\frac{3}{5}$.

12)

Jeder Gegenstand der Algebra enthält eine entwicklungsfähige Gleichung, und die Gleichung eines algebraischen Gegenstandes fällt entweder geradezu in die Augen, oder sie muß nach den Verhältnissen und Bedingungen desselben gesucht werden.

13)

Die Entwickelung der algebraischen Gleichungen geschieht nach ihrer jedesmaligen Beschaffenheit, abwech-

selnd durch Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Quadriren und Cubiren, durch ein Ausziehen der Quadrat- oder Cubikwurzel.

Dies nun deutlicher zu machen, fügen wir noch folgendes hinzu. Es sind z. B. folgende einfache Gleichungen gegeben, man soll sie auflösen.

$$\begin{array}{rl} x + 8 = 24 \\ -8 - 8 \\ \hline x = 16 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} a + y = m \\ -y - y \\ \hline a = m - y \end{array}$$

Man sieht hier, daß in der einen Gleichung auf beiden Seiten 8, und in der andern eben so y abgezogen ist.

$$\begin{array}{rl} x - 10 = 22 \\ + 10 + 10 \\ \hline x = 32 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} b - x = a \\ + x + x \\ \hline b = a + x \end{array}$$

Hier ist in der einen Gleichung auf beiden Seiten 10 addirt, in der andern eben so x hinzugesetzt.

$$:8)\ \frac{8z = 57}{z = 7\frac{1}{8}} \qquad :k)\ \frac{km = v - c}{m = \frac{v - c}{k}}$$

Diese Gleichungen sind durch die Division auf beiden Seiten aufgelöst.

$$\times 4)\ \frac{\frac{x}{4} = 8}{x = 32} \qquad \times 5b)\ \frac{\frac{a}{5b} = 6k + m^3}{a = 30bk + 5bm^3}$$

In diesen Gleichungen ist die Multiplication angewendet.

$$\sqrt{\ }\ \frac{x^2 = 144}{x = 12} \qquad \sqrt[3]{\ }\ \frac{y^3 = 729}{y = 9}$$

In diesen beiden Gleichungen ist in der einen die Quadrat- und in der andern die Cubikwurzel ausgezogen worden.

Aus obigen ergibt sich, daß jede Gleichung durch die ihr entgegengesetzte Rechnungsart entwickelt wird.

Sind nun aber die Gleichungen zusammengesetzter, d. h. wenn mehre bekannte Größen mit der unbekannten durch die vier Rechnungsarten verbunden sind, so können sie nur nach und nach weggeschafft werden. Ist die unbekannte Größe mit andern Gliedern dividirt, dann ist es am besten, wenn man die Division zuerst zu heben sucht. Wir nehmen z. B. folgende Gleichung.

$$\frac{6y + k}{8} = m - 4k$$

$$\times 8) \quad 6y + k = 8m - 32k$$

$$-k \qquad -k$$

$$: 6) \quad 6y = 8m - 33k$$

$$y = \frac{8m - 33k}{6}$$

Die Gleichungen werden nach Graden abgetheilt. Gleichungen des ersten Grades sind die, wo die unbekannten Größen 1 zum Exponenten haben; zum zweiten Grade gehören die, wo der Exponent 2 ist, und so vom dritten rc. Grade.

Regel, wie man jede gegebene Aufgabe in eine Gleichung bringen soll.

1) Alle Umstände und Bedingungen, mit welcher eine Aufgabe vorgetragen wird, fasse man genau ins Auge, und gebe genau darauf Acht, wonach und um was eigentlich gefragt wird.

2) Die bekannten Größen bezeichne man durch die Anfangsbuchstaben a, b, c, d etc. oder auch, im Fall die Rechnung nicht allgemein, sondern für einen bestimmten Fall gilt, mit Zahlen. Die unbe-

kannten Größen aber, nach denen gefragt, oder deren Werth gesucht wird, bezeichne man mit den letzten Buchstaben x, y und z.

3) Man nehme nun an, als wäre die gesuchte Größe wirklich gefunden, und verfahre gerade so, als wollte man die Probe darüber machen.

4) Da der Beweis, ob richtig gerechnet worden, darin besteht, daß bei der Probe zuletzt eine Größe oder Zahl erscheint, die einer andern gleich sein muß, so muß man am Ende der Berechnung jedesmal auf eine eigentliche Gleichung treffen, welcher die Bedingung der Aufgabe gemäß ist. Ist nun einmal die Gleichung da, dann kann man nach obigen Grund- und Lehrsätzen die unbekannte Größe bald finden.

VII.

Auflösung algebraischer Aufgaben mit einer unbekannten Größe.

Im Vortrage der Aufgaben werden wir uns in sofern an die Ordnung binden, als sie rücksichtlich ihrer Verschiedenheit des Inhaltes und der Gleichungen folgen möchten.

1. Aufgabe.

Ein Oekonom hat 3 Pferde von verschiedener Beschaffenheit für 180 Rthlr. gekauft. Als er damit nach Hause kam, fragte ihn sein Nachbar, wie theuer jedes dieser Pferde sei, und erhielt die Antwort: daß das zweite 10 Rthlr. mehr als das erste, das dritte so viel als das erste und zweite und noch 20 Rthlr. dazu, und alle drei zusammen 180 Rthlr. kosteten. Wie theuer war jedes Pferd?

Auflösung. Hier muß man den Preis des ersten Pferdes mit x bezeichnen, und dann eben so das zweite mit x + 10, und das dritte mit 2x + 30, alsdann verfahren wie folgt:

das erste $= x$
„ zweite $= x + 10$
„ dritte $= 2x + 30$

$$4x + 40 = 180$$
$$-40 \quad -40$$
$$4x = 140$$
$$:4) \quad x = 35 \text{ Rthlr.}$$

Da das erste kostet	35 Rthlr.		= 35
so kostet das zweite	35 „	+ 10	= 45
und das dritte	70 „	+ 30	= 100
			180 Rthlr.

2. Aufgabe.

Ein Vater verordnet in seinem Testamente, daß sein Sohn M 300 Rthlr. mehr als L, N so viel als M und noch 200 Rthlr. mehr, die Tochter P so viel als die Söhne L und M, und die Tochter W so viel als P und noch 500 Rthlr. mehr von seiner Hinterlassenschaft erhalten sollen. Wenn nun das ganze Vermögen

26000 Rthlr. beträgt, so ist die Frage, wie viel nach obigen Bestimmungen Jedes erhalten muß?

Auflösung. Man setze: L erhalte x, so bekommt M $x + 300$, N $x + 500$, P $2x + 300$ und W $2x + 800$. Man addire diese Größen und verfahre wie in voriger Aufgabe geschehen ist.

$$\begin{aligned} L &= x \\ M &= x + 300 \\ N &= x + 500 \\ P &= 2x + 300 \\ W &= 2x + 800 \\ \hline 7x + 1900 &= 26000 \\ -1900 &\quad -1900 \\ \hline 7x &= 24100 \\ :7)\quad x &= 3442\tfrac{6}{7} \end{aligned}$$

Rthlr. erhält L.

Nun mache man die Probe hierüber:

$$\begin{aligned} L &= 3442\tfrac{6}{7} &&= 3442\tfrac{6}{7} \text{ Rthlr.} \\ M &= 3442\tfrac{6}{7} + 300 &&= 3742\tfrac{6}{7} \;\; " \\ N &= 3442\tfrac{6}{7} + 500 &&= 3942\tfrac{6}{7} \;\; " \\ P &= 6885\tfrac{5}{7} + 300 &&= 7185\tfrac{5}{7} \;\; " \\ W &= 6885\tfrac{5}{7} + 800 &&= 7685\tfrac{5}{7} \;\; " \\ \hline & && 26000 \text{ Rthlr. Probe.} \end{aligned}$$

3. Aufgabe.

Unter zwei Freunden der Mathematik, die ihre gegenseitigen Antworten immer algebraisch einkleideten, traf sichs einmal, daß der eine, K, von dem andern, M, einen Geldvorschuß zu haben wünschte. M sagte: so hoch erstreckt sich meine Kasse nicht, um dir mit soviel, als du brauchst, zu helfen, denn wenn ich noch zweimal so viel und noch dreimal soviel weniger 20 Rthlr. hätte, als ich jetzt liegen habe, so würde meine Baarschaft erst in 350 Rthlr. bestehen. Wie viel Geld hatte M liegen?

Auflösung. M hatte x Rthlr.; hierzu kommen folglich 2x und 3x — 20. Man setze daher

$$\begin{array}{rl} & x \\ & 2x \\ & 3x - 20 \\ \hline & 6x - 20 = 350 \\ & \quad + 20 + 20 \\ \hline & 6x = 370 \\ :6) & x = 61\tfrac{2}{3} \end{array}$$

Rthlr. hatte M in Kasse.

Man mache nun die Probe hierüber.

$$\begin{array}{lcl} 61\tfrac{2}{3} & = & 61\tfrac{2}{3} \text{ Rthlr.} \\ 61\tfrac{2}{3} \times 2 & = & 123\tfrac{1}{3} \text{ ,,} \\ 61\tfrac{2}{3} \times 3 - 20 & = & 165 \text{ ,,} \\ \hline & & 350 \text{ Rthlr. Probe.} \end{array}$$

4. Aufgabe.

Ein unverheiratheter alter Officier verordnete in seinem Testamente folgende Erbbestimmungen. Die Haushälterin A soll 4mal so viel und noch 20 Rthlr. darüber erhalten, als die Köchin F, der Bediener K soll 3mal so viel weniger 10 Rthlr. erhalten, als die Köchin F, und der Kutscher N soll 2mal so viel als die Köchin, und noch 90 Rthlr. extra bekommen. Nach geschehener gerichtlicher Inventur und nach Abzug aller Kosten bestand die Erbschaftsmasse in 11000 Rthlr. Wie viel wird nun jeder Erbnehmer erhalten müssen?

Auflösung. Der Theil der Köchin gibt hier den Maßstab für die andern an. Man nenne ihn y; so erhält die Haushälterin 4y + 20, der Bediener folglich 3y — 10, und mithin der Kutscher 2y + 90. Man setze sonach

$$\begin{array}{ll}
F & = y \\
K & = 3y - 10 \\
A & = 4y + 20 \\
N & = 2y + 90 \\
\hline
& 10y + 110 - 10 = 11000
\end{array}$$

abgekürzt $10y + 100 = 11000$

$$\begin{array}{rcl}
10y + 100 & = & 11000 \\
-100 & & -100 \\
\hline
10y & = & 10900 \\
\hline
y & = & 1090
\end{array}$$

:10) $y = 1090$ Rthlr. erhält die Köchin.

Nun mache man die Berechnung darüber, wie viel jedes erhalten muß.

Die Köchin	F	erhält	1090	= 1090	Rthlr.
Die Haushälterin	A	=	4360 + 20	= 4380	=
Der Bediener	K	=	3270 — 10	= 3260	=
Der Kutscher	N	=	2180 + 90	= 2270	=
				11000	Rthlr.
					Probe.

5. Aufgabe.

Pythagoras wurde einstmals gefragt, wie viel Scholaren er hätte? Er sagte: die Hälfte meiner Scholaren hören Philosophie, der vierte Theil Mathematik, der siebente Theil schweigt still, und noch drei, die sich heute gemeldet haben, nehmen Morgen auch Antheil. Wie viel sind es Scholaren zusammen gewesen?

Auflösung. Setzt man ihre Anzahl auf z, so hat man $\frac{z}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z}{7} + 3 = x$. Man addire die gebrochenen Größen, und bilde dann die Gleichung.

$$\begin{array}{c|l} & 28 \\ \frac{z}{2} & 14z \\ \frac{z}{4} & 7z \\ \frac{z}{7} & 4z \end{array}$$

$$\frac{25z}{28} + 3 = z$$

$$\times 28 \quad 25z + 84 = 28z$$

$$-25z \qquad -25z$$

$$84 = 3z$$

$$:3) \quad 28 = z.$$ Es waren demnach 28 Scholaren.

14	$= \frac{1}{2}$	hören Philosophie
7	$= \frac{1}{4}$	" Mathematik
4	$= \frac{1}{7}$	Stillschweigende
3	=	als neue Schüler
28		Probe.

6. Aufgabe.

Ein hungriger Fuchs kam einstmals vor das Hühnerhaus eines Landwirths und rief: seid gegrüßt ihr Hühner alle 60! Der Haushahn aber antwortete und sprach: der Hühner sind nicht so viel, als du sagst, sondern wenn ihrer noch so viel, noch halb so viel, und die 5, welche über unserer Wohnung sitzen, noch dazu gerechnet würden, als ihrer sind, dann wären ihrer gerade 60. Wie viel Hühner waren es?

Auflösung. Es waren x Stück; folglich setze man:

	x
noch so viel	x
noch halb so viel	$+\frac{x}{2}$
noch 5 dazu	$+5$

$$2x + \frac{x}{2} + 5 = 60.$$

$$2x + \frac{x}{2} + 5 = 60$$

$$\times 2) \quad 4x + x + 10 = 120$$

zusammengestellt $5x + 10 = 120$

$$-10 - 10$$

$$5x = 110$$

$$:5) \quad x = 22$$ Hühner waren es.

22 Stück waren es
22 „ noch so viel
11 „ noch halb so viel
5 „ noch dazu
60 Stück Probe.

7. Aufgabe.

Ein begüterter Mann hinterläßt bei seinem Ableben eine schwangere Frau, und verordnet in seinem Testamente, daß, im Fall sie einen Sohn zur Welt brächte, dieser $\frac{2}{3}$ von der Hinterlassenschaft und die Mutter $\frac{1}{3}$ davon erhalten solle. Würde sie aber eine Tochter gebähren, so solle diese $\frac{1}{3}$ und die Mutter $\frac{2}{3}$ haben. Die Sache machte sich indeß bei der Niederkunft ganz anders, denn es wurden Zwillinge, ein Sohn und eine Tochter, geboren. Nun ist die Frage, wie das Testament erfüllt werden soll? Das Vermögen betrug 107716 Rthlr.

Auflösung. Ueberlegt man diese Aufgabe genau, so findet man, daß der Wille des Erblassers dahin zielt, dem Sohne doppelt so viel zuzuwenden als der Mutter, dieser aber doppelt so viel als der Tochter, und daß man daher 7 Theile aus dem Vermögen bilden muß, wovon einer der Tochter, zwei der Mutter und vier dem Sohne zugetheilt werden müssen. Man setze daher

für die Tochter y
so erhält die Mutter 2y
und der Sohn 4y

$$7y = 107716$$

:7)

$$y = 15388$$ Rthl. erhält die Tochter
30776 „ „ „ Mutter
61552 „ „ der Sohn.
107716 Rthlr. Probe.

8. Aufgabe.

Ein reicher Mann vertheilt 600 Rthlr. unter vier Armenklassen, dergestalt, daß die zweite halb so viel als die erste, die dritte $\frac{1}{4}$ weniger als die zweite; und die vierte $\frac{2}{3}$ weniger als die dritte erhalten soll. Wie viel wird demnach jede Klasse bekommen?

Man setze den Antheil der ersten Klasse z

so ist der Antheil der zweiten Klasse $= \frac{z}{2}$

der dritten $\frac{1}{4}$ weniger, oder $\frac{3}{4}$ von $\frac{z}{2} = \frac{3z}{8}$

der vierten $\frac{2}{3}$ weniger oder $\frac{1}{3}$ von $\frac{3z}{8} = \frac{z}{8}$

$$\left.\begin{matrix}\frac{z}{2}\\ \frac{3z}{8}\\ \frac{z}{8}\end{matrix}\right\} = \frac{8}{8} = z + z = 2z$$

Folglich: $2z = 600$

:2)

$z = 300$ Rthlr. für die erste Klasse.

$\frac{z}{2} = 150$ „ „ „ zweite Klasse.

$\frac{3z}{8} = 112\frac{1}{2}$ „ „ „ dritte Klasse.

$\frac{z}{8} = 37\frac{1}{2}$ „ „ „ vierte Klasse.

600 Rthlr. Probe.

9. Aufgabe.

Drei Kaufleute haben bei einer Handelsspeculation 1500 Rthlr. gewonnen. Vor Unternehmung des Ge-

schäfts hatten sie aber die Verabredung getroffen, daß B 120 Rthlr. vor A, und C 160 vor B voraus nehmen solle, um dadurch mehr geleistete Bemühungen auszugleichen. Wie groß wird demnach der Antheil eines jeden werden?

Man setze den Antheil des A $= x$
so beträgt der Antheil des B $= x + 120$
und der Antheil des C $= x + 120 + 160$

Folglich $3x + 240 + 160$

Zusammen $3x + 400 = 1500$

$$\begin{aligned} 3x + 400 &= 1500 \\ - 400 &\quad - 400 \\ 3x &= 1100 \\ :3) \quad x &= 366\tfrac{2}{3} \text{ Rthlr. erhält A.} \end{aligned}$$

A erhält	$366\frac{2}{3}$	$= 366\frac{2}{3}$	Rthlr.
B „	$366\frac{2}{3} + 120$	$= 486\frac{2}{3}$	„
C „	$366\frac{2}{3} + 280$	$= 646\frac{2}{3}$	„
		1500	Rthlr. Probe.

10. Aufgabe.

Es hat Jemand eine Summe Geld und will diese in Wolle anlegen. Wenn er nun 20 Stein bezahlt, so bleiben ihm 65 Rthlr. übrig; wenn er aber 30 Stein kauft, so fehlen ihm noch 80 Rthlr. Wie stark war seine Kasse, wie viel Steine hat er kaufen können, und wie theuer ist jeder Stein gewesen?

Auflösung. Man berechne beide Fälle nach der Regel Detri folgendermaßen:

1 Stein : y Rthlr. = 20 Stein?

20 y Rthlr.

1 Stein : y Rthlr. = 30 Stein?

30 y Rthlr.

Hieraus bilde man folgende Gleichung:

$$20y + 65 = 30y - 80$$
$$\quad + 80 \qquad\quad + 80$$
$$20y + 145 = 30y$$
$$-20y \qquad\quad - 20y$$
$$145 = 10y$$

:10) $14\frac{1}{2}$ Rthlr. = y, hat also ein Stein gegolten.

Nun mache man die Proberechnungen darüber.

1 Stein : $14\frac{1}{2}$ Rthlr. = 20 Stein?

```
    20
   ---
   280
    10
   ---
   290 Rthlr.
    65   „   bleiben übrig
   ---
   355 Rthlr. war die Kasse.
```

1 Stein : $14\frac{1}{2}$ Rthlr. = 30 Stein?

```
    30
   ---
   420
    15
   ---
   435 Rthlr.
    80   „   fehlen hierbei
   ---
   355 Rthlr. war die Kasse.
```

Auch berechne man, wie theuer 1 Stein zu stehen kam, wie folgt:

$14\frac{1}{2}$ Rthlr. : 1 Stein = 355 Rthlr.? (2×

```
29            710 | 24 14/29 Rthlr. = 1 Stein.
       :29)    58 |
              --- |
              130 |
              116 |
              --- |
               14 |
```

11. Aufgabe.

Hört Kinder! sagte ein alter Schullehrer zu seinen Schülern, ihr seht, daß die Schule täglich droht, über unsern Köpfen zusammen zu stürzen, und daß die Gemeindevorsteher kein Mittel ausfindig machen können, die Baukosten zu einem neuen Schulgebäude herbeizuschaffen, habt ihr ebenfalls öfters gehört. Nun habe ich mir die Sache anders überlegt, um ein neues Gebäude in Stand zu setzen. Seit einer Reihe von Jahren habe ich mir ein Sümmchen Geld von 210 Rthlr. erspart, das ich mit zum neuen Schulhause verwenden will, und habe berechnet, daß, wenn jeder Knabe von euch 6 Rthlr. außerdem noch dazu beiträgt, 50 Rthlr. am Aufwande fehlen; gibt aber jeder 8 Rthlr., so behalten wir 30 Rthlr. übrig. Wie viel Knaben waren es, und wie hoch kam das Schulhaus zu stehen?

Auflösung. Man setze erstlich nach der Regel Detri:

1 Knabe : 6 Rthlr. = z Knaben?

$$6z + 50$$

1 Knabe : 8 Rthlr. = z Knaben?

$$8z - 30$$

Nun bilde man hieraus die Gleichung:

$$6z + 50 = 8z - 30$$
$$+ 30 \qquad + 30$$
$$6z + 80 = 8z$$
$$- 6z \qquad - 6z$$
$$80 = 2z$$
$$:2)\; 40 = z.$$

Es waren also 40 Knaben.

Die Proberechnungen mache man folgendermaßen:

1 Knabe : 6 Rthlr. = 40 Knaben?
6
240 Rthlr.
50 = fehlen
290 Rthlr.

1 Knabe : 8 Rthlr. = 40 Knaben?
8
320 Rthlr.
30 = übrig
290 Rthlr.

Das Haus kostete also 290 + 210 = 500 Rthlr., wozu die Knaben 290 und 210 Rthlr. der Lehrer beitrugen.

12. Aufgabe.

Ein Weinhändler verkauft 30 Eimer Wein, weißen und rothen, für 210 Rthlr. Wenn der weiße 5 und der rothe 8 Rthlr. pro Eimer gekostet hat, wie viel ist von jeder Sorte gewesen?

Auflösung. Wenn man den weißen zu x Eimer setzt, so ist vom rothen 30 — x gewesen. Es kommen daher zur Gleichung $5 \times x = 5x$ und $8 \times 30 - x = 240 - 8x$. Folglich:

$$5x + 240 - 8x = 210$$

abgekürzt $240 - 3x = 210$

versetzt $210 + 3x = 240$

$$-210 \qquad -210$$

$$3x = 30$$

: 3) $x = 10$ Eimer vom weißen,

und folglich 20 Eimer vom rothen.

10 Eimer zu 5 Rthlr. = 50 Rthlr.
20 = = 8 = = 160 =
210 Rthlr. Probe.

13. Aufgabe.

Ein Landmann hat zweierlei Waitzensorten liegen, wovon die eine $2\frac{1}{2}$ Rthlr. und die andere $3\frac{1}{2}$ Rthlr. der Scheffel werth ist. Beide Sorten möchte er nun gern so unter einander mischen, daß er das Gemisch für 3 Rthlr. jeden Scheffel verkaufen könnte. Wie viel müssen daher zu 100 Scheffel Gemische von jeder Sorte genommen werden?

Auflösung. Setzt man für die Anzahl der Scheffel zur ersten Sorte y, so betragen die Scheffel der zweiten Sorte 100 — y. Folglich hat man die Gleichung, in welcher die Preiße in halben Thalern gesetzt sind, um die Brüche $2\frac{1}{2}$ und $3\frac{1}{2}$ zu vermeiden.

$$y \times 5 + 100 - y \times 7 = 100 \times 6$$

aufgelöst $5y + 700 - 7y = 600$

versetzt $5y + 700 = 600 + 7y$

$$- 600 \quad - 600$$

$$5y + 100 = 7y$$

$$-5y \quad -5y$$

$$100 = 2y$$

$: 2)$ $50 = y$. Also 50 Scheffel von der ersten Sorte, und folglich 50 Scheffel von der andern Sorte müssen zum Gemische genommen werden. Man berechne darüber die Probe.

50	Scheffel	zu	$2\frac{1}{2}$ Rthlr.	=	125 Rthlr.
50	„	„	$3\frac{1}{2}$ „	=	175 „

300 Rthlr. = 100 Scheffeln zu 3 Rthlr.

14. Aufgabe.

Vier Schüler sollen sich in 10 Rthlr. Prämien so theilen, daß **L** 1 Rthlr. mehr als **K**, **M** 1 Rthlr. mehr

als L, und N 1 Rthlr. mehr als M erhält. Wie viel muß nach diesen Bestimmungen jeder bekommen?

Man setze K erhalte z
so erhält L $z + 1$
= = M $z + 2$
und N $z + 3$

$$4z + 6 = 10$$
$$- 6 - 6$$

$$4z = 4$$
:4) $z = 1$ Rthlr für den Antheil des K.

K erhält 1 Rthlr. = 1 Rthlr.
L = $1 + 1 = 2$ =
M = $2 + 1 = 3$ =
N = $3 + 1 = 4$ =

Probe = 10 Rthlr.

15. Aufgabe.

Drei Brüder kaufen einen Gasthof für 25000 Rthlr., wozu jeder nach Verhältniß seines Vermögens so dazu beiträgt, daß der zweite 2mal so viel als der erste, und der dritte 3mal so viel, als der zweite, dazu bezahlt. Wie viel hat nun jeder beigetragen?

Man setze den ersten mit x
so hat der zweite 2x
und der dritte 6x

$$9x = 25000$$
:9) $x = 2777\frac{7}{9}$ Rthlr. der erste

$2777\frac{7}{9}$ Rthlr. der erste
$5555\frac{5}{9}$ = = zweite
$16666\frac{6}{9}$ = = dritte

25000 Rthlr. Probe.

16. Aufgabe.

Ein schon reicher Mann hatte einen bedeutenden Gewinn in der Lotterie erhalten, wovon er $\frac{1}{3}$ den Armen

und $\frac{1}{4}$ der Schule gibt, und noch 840 Rthlr. übrig behält, um auch diese zu wohlthätigen Zwecken zu verwenden. Wie groß ist der Gewinn gewesen und wie viel haben die Armen und die Schule erhalten.

Der Gewinn war x, folglich erhielten die Armen $\frac{x}{3}$ und die Schule $\frac{x}{4}$. Man addire daher diese Brüche und setze dann folgende Gleichung.

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{c}{12} \\ \frac{x}{3} & 4x \\ \frac{x}{4} & 3x \end{array}$$

$$\frac{7x}{12} + 840 = x$$

$$\times 12) \quad 7x = 10080 = 12x$$

$$-7x \qquad -7x$$

$$:5) \quad 10080 = 5x$$

$$2016 = x \text{ beträgt der Gewinn.}$$

672 Rthlr. = $\frac{1}{3}$ den Armen
504 = = $\frac{1}{4}$ der Schule
840 = ist noch übrig.

2016 Rthlr. Probe.

17. Aufgabe.

Eine Gesellschaft lustiger Studenten verzehren in mehrern Tagen in einer großen Stadt 75 Rthlr. Zur Tilgung dieser Schuld treffen sie unter einander die Verabredung, daß jeder Student so viele Thaler geben solle, als der dritte Theil der Studentenzahl beträgt. Wie viel waren es ihrer und wie viel hat jeder bezahlt?

Es waren y Studenten und jeder gab $\frac{y}{3}$; folglich $y \times \frac{y}{3} = \frac{y^2}{3}$. Daher die Gleichnng:

$$\frac{y^2}{3} = 75$$

$$\times 3)\quad y^2 = 225$$

$$\sqrt[2]{}\quad \begin{array}{r|l} 225 & 15 \\ 1 & \\ \hline 125 & \\ 25 & \\ 125 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

15 Studenten. Der dritte Theil davon beträgt 5, folglich hat jeder 5 Rthlr. bezahlt, und $15 \times 5 = 75$ zur Probe.

18. Aufgabe.

Ein Student erhält von seinem Vater einen Wechsel, welchen er sogleich gegen Baarschaft an den Mann bringt, und $\frac{1}{3}$ vom Gelde für Kostgeld, $\frac{1}{4}$ für Collegia und $\frac{1}{5}$ für Kleider ausgibt und noch 26 Rthlr. übrig behält. Wie viel Thaler betrug der Wechsel, und wie viel gab er eigentlich davon aus?

Man setze der Wechsel sei z Rthlr. stark gewesen, so betragen die Ausgaben $\frac{z}{3} + \frac{z}{4} + \frac{z}{5}$, und nachdem man diese Brüche addirt, so setze man folgende Gleichung:

$$\begin{array}{c|l} 60 & \\ \frac{z}{3} & 20z \\ \frac{z}{4} & 15z \\ \frac{z}{5} & 12z \end{array}$$

$$\frac{47z}{60} + 26 = z$$

$$\times 60)\quad 47z + 1560 = 60z$$

$$47z \qquad -47z$$

$$1560 = 13z$$

$$:13)\quad 120 = z.$$

Der Wechsel ist also 120 Rthlr. stark.

$\frac{1}{3}$ aus 120 = 40 Rthlr. für Kostgeld
$\frac{1}{4}$ „ 120 = 30 „ „ Collegia
$\frac{1}{5}$ „ 120 = 24 „ „ Kleider
26 „ waren noch übrig

120 Rthlr. Probe.

19. Aufgabe.

Ein Jude ersteht in einer Auction vier silberne Leuchter für 170 Rthlr. Der zweite wiegt halb so schwer als der erste, der dritte wiegt halb so viel als der zweite, und der vierte halb so schwer als der dritte. Das Loth kostet $\frac{5}{6}$ Rthlr. Nun ist die Frage, wie viel jeder Leuchter gewogen?

		8
Hat der erste	x Loth	
so hat der zweite	$\frac{x}{2}$ „	4x
der dritte	$\frac{x}{4}$ „	2x
und der vierte	$\frac{x}{8}$ „	x

$$x + \frac{7x}{8} = \frac{15x}{8}$$

Da nun ein Loth $\frac{5}{6}$ Rthlr. kostet, so berechne man nach der Regel Detri, wie hoch die $\frac{15x}{8}$ Loth zu stehen kommen, und bilde dann daraus die Gleichung.

$$1 \text{ Loth} : \frac{5}{6} \text{ Rthlr.} = \frac{15x}{8} \text{ Loth?}$$

$$\frac{75x}{48} = 170 \quad (48 \times$$

```
 170
  48
1360
680
8160
```

$: 75x) = 8160 \mid 108\frac{4}{5}$ Loth der erste Leuchter.

75

660

$600 \mid 15$

$\frac{60}{75} = \frac{4}{5}$

Da der erste $108\frac{4}{5}$ Loth wiegt,
so wiegt der zweite $54\frac{4}{10}$ =
der dritte $27\frac{2}{10}$ =
der vierte $13\frac{6}{10}$ =

204 Loth zusammen. Endlich setze man:

1 Loth : $\frac{5}{6}$ Rthlr. = 204 Loth?

5

1020

$: 6)$ 170 Rthlr. Probe.

20. Aufgabe.

Wie viel hast Du gestern im Spiel gewonnen? wurde ein Student von einem andern gefragt. Die Antwort war: wenn ich $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ der gewonnenen Summe in einander multiplicire, so ist das Produkt 3456. Aus wie viel Rthlr. bestand der Gewinn?

Setzt man den Gewinn y Rthlr., so geben die Faktoren $\frac{y}{2}$, $\frac{2y}{3}$ und $\frac{3y}{4}$, diese nun in einander multiplicirt und dann die Gleichung formirt.

$$\frac{y}{2} \times \frac{2y}{3} \times \frac{3y}{4} = \frac{6y^3}{24} \overset{6}{=} \frac{y^3}{4}$$

$$\frac{y^3}{4} = 3456$$

$$\phantom{\frac{y^3}{4} = 345}4$$

$$y^3 = 13{,}824$$

$\sqrt[3]{y^3} = 13{,}824 \mid 24$ Rthlr. $= y$.

$$\begin{array}{r|l} 13{,}824 & 24 \\ 8 & \\ \hline 5824 & \\ 12 & \\ \hline 48 & \\ 96 & \\ 64 & \\ \hline 5824 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Nun mache man die Probe:

$$\begin{array}{rcr} \frac{1}{2} \text{ aus } 24 & = & 12 \\ \frac{2}{3} \text{ „ } 24 & = & 16 \\ \hline & & 72 \\ & & 12 \\ \hline & & 192 \\ \frac{3}{4} \text{ „ } 24 & = & 18 \\ \hline & & 1536 \\ & & 192 \\ \hline & & 3456 \end{array}$$

Probe.

21. Aufgabe.

Unter zwei Personen wurden 120 Rthlr. so vertheilt, daß, wenn man den Theil des ersten mit 5, und den Theil des zweiten mit 7 multiplicirt, man einerlei Producte erhält. Wie viel hat sonach jeder bekommen?

Man nehme an, der Theil eines Jeden sei z, so hat der erste $z \times 5 = 5z$, folglich der zweite $120 - z \times 7 = 840 - 7z$. Hieraus setze man nun die Gleichung:

$$5z = 840 - 7z$$

versetzt $+ 7z = 840 - 5z$

$$\begin{array}{rcl} + 5z & & + 5z \\ \hline 12z & = & 840 \end{array}$$

$:12)$ $z = 70$ Rthlr. als Theil des ersten, folglich ist der Theil des zweiten 50 Rthlr.

Probe: $70 \times 5 = 350$ und
$50 \times 7 = 350$.

22. Aufgabe.

Ein Tuchhändler hat ein Stück Tuch, das er gern losschlagen will, und berechnet, daß, wenn er die Elle für 1 Rthlr. 21 Gr. verkauft, er $7\frac{1}{2}$ Rthlr. verliert; verkauft er aber die Elle für 2 Thlr. 3 Gr., so gewinnt er $7\frac{1}{2}$ Rthlr. Wie viel Ellen hält das Stück Tuch, und wie viel hat es ihm beim Einkaufe gekostet?

Man setze die gegebenen Ellenpreise in Groschen, nämlich 1 Rthlr. 21 Gr. = 45 Gr. und 2 Rthlr. 3 Gr. = 51 Gr., und die Ellenzahl des Stückes x, so hat man im ersten Falle 45x und im andern 51x. Und da $7\frac{1}{2}$ Rthlr. = 180 Gr., so folgt diese Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} 45x - 180 & = & 51x + 180 \\ +180 & & +180 \\ \hline 45x & = & 51x + 360 \\ -45x & & -45x \\ \hline :6) \quad & & 6x = 360 \\ \hline & & x = 60 \end{array}$$

Ellen hält das Stück Tuch.

Man mache nun die Proberechnung darüber.

1 Elle : 1 Rthlr. 21 Gr. = 60 Ellen?

12	60 Rthlr.	
6	30 "	
3	15 "	
	7 "	12 Gr.
	112 Rthlr.	12 Gr.
	7 "	12 " Verlust.
	120 Rthlr.	

1 Elle : 2 Rthlr. 3 Gr. = 60 Ellen?

$\frac{1}{8}$	2		
	120 Rthlr.		
	7	= 12 Gr.	
	127	= 12 Gr.	
	7	= 12	= Gewinn
	120 Rthlr.		

Der Einkaufspreis war also 120 Rthlr. für 60 Ellen. Im ersten Falle hätte er nur 112 Rthlr. 12 Gr. wieder bekommen, folglich $7\frac{1}{2}$ Rthlr. verloren; im andern hat er aber $127\frac{1}{2}$ Rthlr. erhalten, mithin $7\frac{1}{2}$ Rthlr. gewonnen.

23. Aufgabe.

Ein leichtsinniger Mensch verspielt die Hälfte seiner Baarschaft und vertrinkt außerdem noch 2 Rthlr. Hierdurch noch leichtsinniger, geht er zum zweiten Mal an den Spieltisch und verliert noch $\frac{1}{3}$ seines übrigen Geldes bis auf 10 Rthlr., die er davon bringt. Wie viel betrug die Kasse dies Leichtfußes?

Man setze, er habe anfänglich gehabt y Rthlr., so gehen davon ab $\frac{y}{2}$ und 2, folglich bleiben $\frac{y}{2} - 2$. Hiervon verspielt er wieder $\frac{1}{3}$, das ist $\frac{y}{2} - 2 - \frac{y}{6} - \frac{2}{3} = \frac{y}{3} - 1\frac{1}{3}$. Nun setze man die Gleichung

$$\frac{y}{3} - 1\tfrac{1}{3} = 10$$
$$+ 1\tfrac{1}{3} \quad + 1\tfrac{1}{3}$$
$$\frac{y}{3} = 11\tfrac{1}{3} \qquad (3\times$$
$$\frac{3y}{3} = 34 \qquad (3\times$$
$$3y = 102$$

$$:3)\frac{3y = 102}{y = 34}$$ Rthlr. war die Baarschaft.

$34 - 17 = 17 - 2 = 15 - \frac{1}{3}(=5) = 10$ Rthlr. übrig.

24. Aufgabe.

Lieber Freund! Wie viel Kännchen Lagerbier hast Du denn heute zu Dir genommen? fragte der Dorfschulz den ihm von der Stadt her begegnenden Gerichtsschöppen, dessen Gesicht wie ein Nordlicht glühte. Du willst doch gern was zu rechnen haben, war die Antwort. Wenn Du $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ der von mir getrunkenen Kannen mit einander multiplicirst, so erhältst Du 24 zum Produkt. Wie mußte sich der Schulz nun helfen, um die Kannenzahl herauszubringen, die der Gerichtsschöppe getrunken hatte.

Setzt man die Anzahl der Kannen x, so ist $\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = \frac{x^2}{6}$; folglich hat man die Gleichung:

$$\frac{x^2}{6} = 24$$

$$\sqrt[2]{x^2} = 1{,}44 \mid 12 \text{ Kannen} = x$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ 22 \\ 44 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\frac{1}{2}$ aus $12 = 6$
$\frac{1}{3}$ " $12 = 4$

24 Probe.

25. Aufgabe.

Meister, wie viel Fuß hält diese Brücke in der Länge? ward ein Zimmermann von einem der Baukunst beflissenen Studenten gefragt. Wenn Sie $\frac{7}{8}$ der Länge, zur Länge selbst addiren, und diese Summe durch 4 di-

vidiren, so gibt der Quotient die Zahl 30, war die Antwort. Wie mochte sich der Student wohl helfen, um die Länge der Brücke zu berechnen?

Auflösung. Man setze die Länge zu y Fuß, so hat man die Gleichung:

$$\frac{\frac{7y}{8} + y}{4} = 30$$

$\times 4)$

$$\frac{7y}{8} + y = 120$$

$\times 8)$

$$7y + 8y = 960$$

$$15y = 960$$

$:15)$

$$y = 64$$ Fuß als Länge der Brücke.

26. Aufgabe.

Sage mir doch, wie viel Geld Du jährlich von Deinem Vater erhältst? fragte der Student A den B. B antwortete: wenn mir mein Vater noch so viel, und noch $\frac{1}{3}$ so viel hersendete, als ich jährlich von ihm bekomme, so würde ich so viel über 150 Rthlr. erhalten, als ich jetzt unter 100 Rthlr. bekomme. Wie viel Geld bekam sonach B?

Auflösung. Da der Wechselbetrag unter 100 ist, so setze man, er hätte jährlich empfangen:

$$100 - z$$
$$100 - z$$
$$33\frac{1}{3} - \frac{z}{3}$$

$$233\frac{1}{3} - 2z\frac{z}{3} = 150 + z$$

$\times 3)$

$$700 - \frac{7z}{3} = 150 + z \quad (3\times$$

$$700 - 7z = 450 + 3z$$

$$700 - 7z = 450 + 3z$$
$$+7z \quad\quad +7z$$
$$700 = 450 + 10z$$
$$-450 \quad -450$$
$$250 = 10z$$
$$:10)\quad 25 = z.$$

Hat also $100 - 25 = 75$ Rthlr. jährlich erhalten; daher die Probe:

75 Rthlr.
75 „
$\frac{1}{3} = 25$ „

175 Rthlr., was 25 mehr als 150, und 75 ist um 25 weniger als 100.

27. Aufgabe.

Drei Oekonomen haben eine Heerde Schaafe von 780 Stücken gekauft, wovon B halb so viel als A und noch 20 Stück darüber, und C zweimal so viel als B weniger 80 Stück erhalten müssen. Wie viel Stück wird demnach jeder bekommen?

Auflösung. Setzt man den A = x Stücke

so erhält $B = \frac{x}{2} + 20$

und $C = \frac{2x}{2} + 40 - 80$

daher die Gleichung $2\frac{x}{2} + 60 - 80 = 780$

$$+80 + 80$$
$$\frac{5x}{2} + 60 = 860$$
$$-60 \quad -60$$
$$\frac{5x}{2} = 800$$
$$\times 2)\quad 5x = 1600$$
$$:5)\quad x = 320$$

Stück erhält A.

A	erhält	$320 = 320$	Stück
B	"	$160 + 20 = 180$	"
C	"	$360 - 80 = 280$	"
		Probe 780	Stück.

28. Aufgabe.

In einer Mühle befinden sich drei Mahlgänge. Auf dem ersten können in 3 Stunden 4 Scheffel, auf dem zweiten in 5 Stunden 8 Scheffel, und auf dem dritten in 6 Stunden 9 Scheffel gemahlen werden. Nun sollen 266 Scheffel auf alle 3 Gänge gebracht und zusammen fertig werden. Wie viel Stunden werden dazu nöthig sein?

Auflösung. Man setze y Stunden und berechne nach der Regel Detri, wie viel y Scheffel jeder Gang fertig macht und formire alsdann daraus die Gleichung.

3 St. : 4 Schffl. = y St.?

$\frac{4y}{3}$ Schffl. der erste Gang.

5 St. : 8 Schffl. = y St.?

$\frac{8y}{5}$ Schffl. der zweite Gang.

6 St. : 9 Schffl. = y St.?

$\frac{9y}{6} = \frac{3y}{2}$ Schffl. der dritte Gang. (gekürzt durch 3)

Hauptnenner 30:

$\frac{4y}{3} \mid 40y$

$\frac{8y}{5} \mid 48y$

$\frac{3y}{2} \mid 45y$

$\frac{133y}{30}$

$\frac{133y}{30} = 266$ (30×

$133y = 7980$ (:133)

$y = 60$ Stunden.

3 St. : 4 Schffl. = 60 St. : 80 Schffl.
5 St. : 8 Schffl. = 60 St. : 96 Schffl.
6 St. : 9 Schffl. = 60 St. : 90 Schffl.
――――――――
266 Schffl. Probe.

29. Aufgabe.

Ein Landwirth geht in die Stadt und will für sich und seine Söhne Tuch zu Winterkleidungsstücken kaufen. Unterwegs berechnet er, daß, wenn er die Elle zu 18 Gr. kauft, so bleibt ihm 1 Rthlr. von seiner Casse übrig; kauft er aber die Elle zu 21 Gr., so hat er 4 Rthlr. zu wenig in der Tasche. Nun ist die Frage, wie viel Ellen wollte er kaufen, und wie viel Geld hatte er bei sich?

Auflösung. Es waren z Ellen, und wenn der 1 Rthlr. in 24 und die 4 Rthlr. in 96 reducirt werden, so hat man folgende Gleichung:

$$21z - 96 = 18z + 24$$
$$ - 24 \qquad\quad - 24$$
$$21z - 120 = 18z$$

versetzt
$$21z = 18z + 120$$
$$-18z \quad -18z$$
$$3z = 120$$
$$:3) \quad z = 40 \text{ Ellen.}$$

Probe.

$$1 \text{ Elle} : \tfrac{3}{4} \text{ Rthlr.} = 40 \text{ Ellen?} \quad (3 \times$$
$$:4) \quad 120$$
$$30 \text{ Rthlr.}$$
$$1 \quad " \quad \text{hatte er hierbei übrig.}$$
$$31 \text{ Rthlr. Casse.}$$

1 Elle : $\frac{7}{8}$ Rthlr. = 40 Ellen? (7×

:8) 280

35 Rthlr.

4 „ fehlten ihm hierbei.

31 Rthlr. Casse.

30. Aufgabe.

Ein Vater von 8 Kindern hinterläßt ein Vermögen von 3720 Rthlr. und verordnet in seinem Testamente, daß vom Größten bis zum Kleinsten, jedes nächstfolgende Kind immer 8 Rthlr. mehr erhalten solle. Wie viel wird jedes Kind demnach bekommen?

Man setze dem Aeltesten x, so bekommt das folgende x + 8 und das dritte x + 16 ꝛc. und addire diese Theile, woraus dann die Gleichung formirt wird.

Der Aelteste,	A	erhält	x
	B	„	x + 8
	C	„	x + 16
	D	„	x + 24
	E	„	x + 32
	F	„	x + 40
	G	„	x + 48
	H	„	x + 56

$$8x + 224 = 3720$$
$$-224 \quad -224$$

:8) 8x = 3496

x = 437 Rthlr. bekommt A.

Probe.	A = 437	Rthlr.
	B = 445	„
	C = 453	„
	D = 461	„
	E = 469	„
	F = 477	„
	G = 485	„
	H = 493	„
	3720	Rthlr.

31. Aufgabe.

Zwei Städte liegen 260 Meilen von einander entfernt, und von jeder derselben wird zu gleicher Zeit ein Bothe nach der entgegengesetzten abgeschickt. Wenn nun der eine Bothe täglich 2 Meilen weiter als der andere geht, und beide nach 13 Tagen zusammentreffen; so ist die Frage: wie viel Meilen erstlich jeder täglich, und dann zweitens in den 13 Tagen zurückgelegt hat?

Man berechne nach der Regel Detri.

1 Tag : x Meilen = 13 Tage?

13 x Meilen der eine Bothe.

1 Tag : x + 2 Meilen = 13 Tage?

13 x + 26 Meilen der andere Bothe.

$$13x + 13x + 26 = 260$$

$$26x + 26 = 260$$

$$-26 \quad -26$$

$$26x = 234$$

$: 26)$ $x = 9$ Meilen der eine, folglich der andere $9 + 2 = 11$ Meilen täglich.

Probe.

1 Tag : 9 Meilen = 13 Tage?

117 Meilen der erste Bothe.

1 Tag : 11 Meilen = 13 Tage?

143 Meilen der zweite Bothe.

32. Aufgabe.

Ein Landwirth akkordirt einen Taglöhner nnd verspricht ihm täglich 6 Gr. Lohn ohne Kost, aber an Tagen, wo Beköstigung gegeben wird, erhält er nur 2 Gr. Nach Verlauf von 42 Arbeitstagen rechnen beide Theile zusammen und der Taglöhner bekommt 3 Rthlr. 16 Gr.

Nun ist die Frage, wie viel Tage der Arbeiter mit, und wie viel derselbe ohne Kost gearbeitet habe?

Auflösung. Setzt man die Beköstigungstage mit y, so betragen jene ohne Kost 42 — y. Man berechne daher jeden Betrag:

1 Tag : 2 Gr. = y Tage?
2y Tage.

1 Tag : 6 Gr. = 42 — y Tage?
252 — 6y Tage.

252 — 6y + 2y = 88 Gr.

ausgeglichen 252 — 4y = 88

versetzt 252 = 88 + 4y
— 88 — 88

164 = 4y

: 4) 41 = y Tage hat der Taglöhner die Kost gehabt, und 1 Tag ohne Kost.

Probe.

41 Tage à 2 Gr. = 3 Rthlr. 10 Gr.
1 Tag à 6 „ = — „ 6 „

3 Rthlr. 16 Gr.

33. Aufgabe.

Ein Officier verspricht seinem Kutscher 20 Rthlr. und einen Rock zum Jahrlohne. Nach 7 Monaten werden beide uneinig und rechnen mit einander ab. Hierdurch ergibt sich, daß der Kutscher den Rock und 4 Rthlr. erhält. Wie theuer war der Rock gerechnet?

Auflösung. Man setze nach der Regel Detri:

7 Monate : x + 4 Rthlr. = 12 Monate?

$\frac{12x + 48}{7}$. Hieraus

$\frac{20}{12} \cdot 7 + \frac{7x}{12} = x + 4$

nun die Gleichung formirt:

$$\frac{12x + 48}{7} = 20 + x$$

$$(7\times)\quad 12x + 48 = 140 + 7x$$

$$-48 \qquad -48$$

$$12x = 92 + 7x$$

$$-7x \qquad -7x$$

$$5x = 92$$

$$:5)\quad x = 18\tfrac{2}{5}$$ Rthlr. war der Rock gerechnet.

Da der Kutscher in 7 Monaten den Rock und 4 Rthlr. bekam, so war sein Verdienst in dieser Zeit $22\frac{2}{5}$ Rthlr.

Probe.

7 Monate : $22\frac{2}{5}$ Rthlr. = 12 Monate?

$$35 \qquad 112 \times 12$$

$$:35)\quad 1344$$

$$38\tfrac{2}{5} \text{ Rthlr.}$$

$$-20 \quad =$$

$$18\tfrac{2}{5} \text{ Rthlr.}$$

34. Aufgabe.

Ein Meister verspricht seinem Gesellen für jeden Arbeitstag 7 Gr. Lohn; setzt ihm dagegen für jeden Tag des Müßiggangs 3 Gr. Strafe an. Nach abgelaufenem Jahre, Sonn- und Festtage mitgerechnet, ist keiner dem andern etwas schuldig.

Es ist daher die Frage, wie viel Tage der Gesell gearbeitet hat, und wie viele er gefeiert habe?

Auflösung. Hat er x Tage gearbeitet, so ist der Lohn 7x Gr., und dann hat er gefeiert 365 — x Tage = $365 - x \times 3 = 1095 - 3x$. Daher die Gleichung:

$7x = 3(365 - x)$

$$7x = 1095 - 3x$$
$$+ 3x \qquad + 3x$$
$$10x = 1095$$
$$:10) \quad x = 109\tfrac{1}{2}$$ Tag gearbeitet

$$365 - 109\tfrac{1}{2} = 255\tfrac{1}{2}$$ „ gefeiert

$$365$$ Tage.

Probe.

$$109\tfrac{1}{2} \times 7 = 255\tfrac{1}{2} \times 3$$

$766\tfrac{1}{2}$ Gr. $\quad 766\tfrac{1}{2}$ Gr.

35. Aufgabe.

Sagen Sie mir doch, wie alt jeder von ihren zwei Söhnen ist? fragte A den B; dieser erwiederte: der jüngste ist gerade halb so alt, als der älteste, und quadrirt man die Alterzahl eines jeden und addirt beide Quadrate, so hat man die Summe 720. Wie alt war jeder?

Auflösung. Man setze das Alter des jüngsten Sohnes z, so ist das Quadrat z^2; und da der älteste Sohn noch einmal so alt als jener ist, so ist er 2z alt, und das Quadrat davon beträgt $4z^2$. Folglich

$$z^2 + 4z^2 = 5z^2 = 720$$
$$:5) \sqrt{} \quad z^2 = 144$$
$$z = 12$$ Jahre der Jüngste

und 24 Jahre der Aelteste.

Probe.

$$12 \times 12 = 144$$
$$24 \times 24 = 576$$
$$720$$

36. Aufgabe.

Wie alt ist denn Ihr Vater? fragte B den A, und die Antwort war: ich und mein Vater sind zusammen

132 Jahre alt, und vor 12 Jahren war mein Vater noch einmal so alt als ich. Wie alt war jeder?

Auflösung. Man setze, der Vater war x Jahre alt, so folgt, daß der Sohn 132 — x war. Vor 12 Jahren der Vater x — 12 und der Sohn 132 — x — 12. Daher die Gleichung:

x + 2x + 24 = 132

$$\frac{x-12}{2} = 120 - x \quad (2\times$$

$$x - 12 = 240 - 2x$$
$$2x \qquad + 2x$$
$$3x - 12 = 240$$
$$+12 \quad + 12$$
$$3x = 252$$
$$:3) \quad x = 84 \text{ Jahre, das Alter des Vaters.}$$

Da der Vater 84 Jahre zählt, so beträgt das Alter Sohnes 48, da 84 + 48 = 132 ist. Vor 12 Jahren war der Sohn 36 und der Vater 72, und dieser folglich noch einmal so alt, als sein Sohn.

37. Aufgabe.

Ein Vater ist 64 Jahre alt, und sein Sohn 19. Wie viel Jahre werden verfließen müssen, bis der Vater sagen kann: ich bin noch einmal so alt, als mein Sohn.

Auflösung. y Jahre müssen verfließen, denn $\frac{y+64}{2} = y + 19$.

$$\frac{y+64}{2} = y + 19 \quad (2\times$$

$$y + 64 = 2y + 38$$
$$-y \qquad -y$$
$$64 = y + 38$$
$$-38 \qquad -38$$
$$26 = y.$$

Also 26 Jahre müssen noch verfließen.

Probe.

64 Jahre der Vater	19 Jahre der Sohn
+ 26 „	+ 26 „

Alsdann wird der Vater 90 Jahre und der Sohn 45 alt sein.

38. Aufgabe.

Eine Mutter ist gegenwärtig 53 Jahre alt, und ihre Tochter 21. Wie viel Jahre werden vorübergehen müssen, bis die Mutter sagen kann: ich bin zweimal so alt als meine Tochter.

$$\begin{array}{rcl} \frac{z + 53}{2} & = & z + 21 \quad (2\times \\ \hline z + 53 & = & 2z + 42 \\ -z & & -z \\ \hline 53 & = & z + 42 \\ -42 & & -42 \\ \hline 11 & = & z. \end{array}$$

Also noch 11 Jahre müssen verstreichen, und dann wird die Mutter 64 und die Tochter 32 Jahr alt sein.

39. Aufgabe.

Ein Oekonom will Wolle verkaufen, und hat zwei Käufer dazu. Der erste hat ihm für 4 Stein 33 Rthlr., und der zweite für 5 Stein 42 Rthlr. geboten. Gegen früher ihm gemachte Gebote gewinnt er jetzt im ersten Falle 30 Rthlr. und im zweiten 36 Rthlr. mehr. Wie viel Steine Wolle hatte er liegen und wie hoch ist einer verkauft worden?

Auflösung. Man setze die Anzahl der Steine x und berechne jeden Fall nach der Regel Detri, um dann die Gleichung daraus zu formiren.

4 Steine : 33 Rthlr. = x Steine?

$\frac{33x}{4}$. Folglich $\frac{33x}{4} - 30$.

5 Steine : 42 Rthlr. = x Steine?

$\frac{42x}{5}$. Folglich $\frac{42x}{5} - 36$.

$$\frac{33x}{4} - 30 = \frac{42x}{5} - 36.$$

×4)

$$33x - 120 = \frac{168x}{5} - 144$$

×5)

$$165x - 600 = 168x - 720$$

$$-165x \qquad -165x$$

$$-600 = 3x - 720$$

$$+720 \qquad +720$$

$$120 = 3x$$

: 3)

$$40 = x.$$ Es sind also 40 Steine.

Probe.

: 4) 4 Steine : 33 Rthlr. = 40 Steine?

1 ... 10

33

330 Rthlr.

30 „ Gewinn ab

300 Rthlr.

: 5) 5 Steine : 42 Rthlr. = 40 Steine?

1 ... 8

42

336 Rthlr.

36 „ Gewinn ab

300 Rthlr.

40 Steine : 300 Rthlr. = 1 Stein?

$7\frac{1}{2}$ Rthlr. = 1 Stein.

40. Aufgabe.

Wenn zu einer außerordentlichen Landessteuer jeder Bauer in einem Dorfe 10 Rthlr. beiträgt, so fehlen an der geforderten Summe 84 Rthlr.; gäbe aber jeder Bauer 12 Rthlr., so blieben 116 Rthlr. übrig. Nun befinden sich aber in diesem Dorfe 6 ganz Arme, denen man hierzu nichts abfordern kann. Wie viel Einwohner enthält dies Dorf, und wie groß war die Steuersumme?

Auflösung. Die Zahl der Einwohner ist x, folglich x — 6 wegen der Armen. Gibt jeder 10 Rthlr., so beträgt dies $10x - 60$, mithin wäre die Steuersumme $10x - 60 + 84$. Gibt nun aber jeder 12 Rthlr., so beträgt dies $12x - 696$, und dann wäre die Steuersumme $12x - 696 + 116$. Mithin folgende Gleichung:

$$10x - 60 + 84 = 12x - 72 - 116$$

abgekürzt $10x + 24 = 12x - 188$

$$-10x \qquad -10x$$

$$24 = 2x - 188$$

$$+188 \qquad +188$$

$$212 = 2x$$

$: 2)$ $106 = x$. Also 106 Einwohner.

Probe.

106 — 6 Arme = 100.

1 Bauer : 10 Rthlr. = 100 Bauern?

1000 Rthlr.
\+ 84 „ fehlten.
1084 Rthlr.

1 Bauer : 12 Rthlr. = 100 Bauern?

1200 Rthlr.
— 116 „ waren übrig
1084 Rthlr.

Folglich betrug die Steuersumme 1084 Rthlr.

41. Aufgabe.

Hier bringe ich Ihnen Garn zu 150 Ellen Leinwand, sagte ein Mädchen zum Webermeister. Es sind 5 Pfund zu wenig, erwiederte der Weber. Nun dann machen sie nur 100 Ellen, entgegnete das Mädchen. Ja dann sind es 4 Pfund zu viel. Wie viel Pfund Garn waren es, und wie viel Ellen rechnete der Weber auf 1 Pfund?

Auflösung. Setzt man die Pfundzahl zu y, so hat man zu 150 Ellen $y + 5$ und mithin zu 1 Elle $\frac{y+5}{150}$ nöthig; zu 100 Ellen $y - 4$, folglich zu 1 Elle $\frac{y-4}{100}$. Daher folgende Gleichung:

$$\frac{y+5}{150} = \frac{y-4}{100}$$

$$\times 150)\quad y+5 = \frac{150y-600}{100}$$

$$\times 100)\quad 100y+500 = 150y-600$$

$$-100y \qquad -100y$$

$$500 = 50y - 600$$

$$+600 \qquad +600$$

$$1100 = 50y$$

$$:50)\quad 22 = y.$$

Also waren es 22 Pfund Garn.

42. Aufgabe.

Wie viel beträgt die Besoldung eines Beamten, wenn derselbe, seine Ausgaben zu bestreiten, jährlich noch 130 Rthlr. von seinem Vermögen zuschießen muß, und nicht mehr als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ seiner Besoldung ausgibt?

Auflösung. Man setze, die Besoldung sei z Rthlr.,

$$\text{so ist } \frac{z}{2} + \frac{z}{3} + \frac{z}{4} = \begin{array}{c|l} \multicolumn{2}{c}{12} \\ \frac{z}{2} & 6z \\ \frac{z}{3} & 4z \\ \frac{z}{4} & 3z \end{array}$$

$$\frac{13z}{12} = z + 130$$

$$\times 12) \quad 13z = 12z + 1560$$

$$-12z - 12z$$

$$z = 1560 \text{ Ausgabe.}$$

43. Aufgabe.

Ein Vater verordnet in seinem Testamente, daß seine 11 Kinder dergestalt sich in die hinterlassenen 7200 Rthlr. theilen sollen, damit ein Sohn 720 Rthlr. und eine Tochter 600 Rthlr. erhalte. Bei der Theilung ging das Vermögen gerade auf; es ist daher die Frage, wie viel Söhne und wie viel Töchter es waren?

Auflösung. Setzt man die Zahl der Söhne x, so waren es 11 — x Töchter, und da jeder Sohn 720 Rthlr. bekommen soll, so erhalten diese 720 x und die Töchter $11 - x \times 600 = 6600 - 600x$. Daher folgende Gleichung:

$$7200 = 6600 - 600x + 720x$$

$$\text{abgekürzt} \quad 7200 = 6600 + 120x$$

$$-6600 - 6600$$

$$600 = 120x$$

$$:120) \quad 5 = x.$$

Es waren also 5 Söhne und folglich 6 Töchter.

Probe.

5 Söhne, jedem 720 Rthlr. = 3600 Rthlr.
6 Töchter, jeder 600 „ = 3600 „
7200 Rthlr.

44. Aufgabe.

In einer Stadt liegen 600 Soldaten, Cavallerie und Infanterie, welche monatlich zusammen 3600 Rthlr. erhalten. Wenn nun 1 Cavallerist 8 Rthlr. und 1 Infanterist 5 Rthlr. bekommt, so ist die Frage, wie viel Mann von jeder Waffe es waren?

Auflösung. Man setze die Zahl der Cavalleristen y, so hat man 600 — y Infanteristen, und da jeder Cavallerist 8 Rthlr. erhält, so beträgt dies 8y und die Infanteristen betragen daher 3000 — 5y. Mithin entsteht folgende Gleichung:

$$3600 = 3000 - 5y + 8y$$

abgekürzt $3600 = 3000 + 3y$

$$-3000 \quad -3000$$

$$600 = 3y$$

: 3) $200 = y$. Es waren also 200 Cavalleristen und folglich 400 Infanteristen.

Probe.

200 Cavalleristen, jedem 8 Rthlr. = 1600 Rthlr.
400 Infanteristen, „ 5 „ = 2000 „
3600 Rthlr.

45. Aufgabe.

Ein Landwirth hat 40 Stück fette Schweine und bringt solche in eine Stadt auf den Markt. Am Zollhause gibt er 1 Stück ab und erhält 8 Rthlr. heraus. Einige Zeit darauf bringt er wieder 120 Stück dergleichen, und gibt auf dem Zolle wieder 1 Stück ab, muß

aber noch 4 Rthlr. zugeben. Wie hoch war 1 Schwein gerechnet?

Auflösung. Man setze, ein Schwein sei z Rthlr. gerechnet, so beträgt der Zoll für 40 Stück z — 8, folglich für 1 $= \frac{z-8}{40}$. Zum andern Male gab er für 120 Stück z + 4, mithin für 1 $= \frac{z+4}{120}$. Also hat man folgende Gleichung:

$$\frac{z+4}{120} = \frac{z-8}{40}$$

$$\times 120) \quad z+4 = \frac{120z-960}{40}$$

$$\times 40) \quad 40z+160 = 120z-960$$

$$-40z \qquad -40z$$

$$160 = 80z-960$$

$$+960 \qquad +960$$

$$1120 = 80z$$

$$:80) \quad 14 = z$$

40 Stück Schweine kosteten also 14 — 8 = 6 Rthlr. Zoll; und 120 Stück kosteten 14 + 4 = 18 Rthlr. Zoll, mithin jedes Stück 3 Gr. $7\frac{1}{5}$ Pf.

46. Aufgabe.

In einer Stadt, welche in 3 Theile getheilt ist, soll ein neues Schulgebäude gebaut werden. Es sollen hierzu 4500 Rthlr. verwendet werden, wozu das zweite Stadtdrittel noch einmal so viel als das erste, weniger 20 Rthlr., und das dritte $\frac{2}{3}$ des ersten und noch 15 Rthlr. beitragen. Wie viel muß nach diesem Verhältniß jedes Drittel bezahlen?

Auflösung. Setzt man das erste Drittel zu x

Rthlr., so gibt das zweite $2x - 20$, und das dritte $\frac{2x}{3} + 15$. Es ergibt sich daher die Gleichung:

$$4500 = x + 2x + \frac{2x}{3} - 20 + 15$$

geordnet $4500 = 3x + \frac{2x}{3} - 5$

$\times 3)$ $13500 = 9x + 2x - 15$

abgekürzt $13500 = 11x - 15$

$+ \quad 15 \qquad + 15$

$13515 = 11x$

$:11)$ $1228\frac{7}{11} = x$ für das 1. Drittel $= 1228\frac{7}{11}$ Rthlr.

$2457\frac{3}{11}$ das 2. wenig. 20 Rthl. $= 2437\frac{3}{11}$ „

$819\frac{1}{11}$ das 3. u. noch 15 Rthl. $= 834\frac{1}{11}$ „

Probe 4500 Rthlr.

47. Aufgabe.

Ein Gutsbesitzer will einen Garten so anlegen, daß er 1200 Quadratruthen halten, und dreimal so lang als breit sein soll. Wie viel Ruthen muß die Länge, und wie viel die Breite dieses Gartens betragen?

Auflösung. Bezeichnet man die Breite des Gartens mit x, so beträgt die Länge 3x, und $x \times 3x = 3x^2$, und $3x^2 = 1200$ als Gleichung.

$$3x^2 = 1200$$

$:3)$ $x^2 = 400$

$\sqrt[2]{}$ $x = 20$ Ruthen die Breite.

Probe.

$3 \times 20 = 60$ Länge, und

$60 \times 20 = 1200$ Quadratruthen.

48. Aufgabe.

Es will sich Jemand einen Keller bauen lassen, dessen Höhe, Breite und Länge sich wie 2, 3, 4 ver-

halten, und dessen Rauminhalt 1536 Kubikfuß betragen soll. Wie viel Fuß muß seine Höhe, Breite und Länge enthalten?

Auflösung. Man setze die Höhe des Kellers y Fuß, und berechne nach der Regel Detri

$$2 : y = 3$$

$$\frac{3y}{2} = 1\tfrac{1}{2}y \text{ Breite,}$$

$$3 : 1\tfrac{1}{2}y = 4$$

$$3 : \frac{3y}{2} = 4$$

$$\frac{12y}{6} = 2y \text{ Länge,}$$

so erhält man y Höhe, $1\frac{1}{2}$y Breite und 2y Länge, und daher beträgt der Kubikinhalt $y \times 1\frac{1}{2}y \times 2y = 3y^3$. Folglich die Gleichung:

$$: 3) \quad 3y^3 = 1536$$

$$\sqrt[3]{} \quad y^3 = 512$$

$$y = 8 \text{ Fuß Höhe}$$

$$1\tfrac{1}{2}y = 12 \text{ Fuß Breite}$$

$$2y = 16 \text{ Fuß Länge.}$$

Und $8 \times 12 \times 16 = 1536$ Kubikfuß.

49. Aufgabe.

Ein Schüler fragte seinen Lehrer, in welchem Jahre Leibnitz gestorben und wie hoch derselbe sein Alter gebracht habe? Die Antwort war: Wenn Sie die Hälfte und den vierten Theil jener Jahreszahl, in welcher Leibnitz starb, mit einander multipliciren, so erhalten Sie 368082 zum Produkte; und wenn Sie die Hälfte und den zehnten Theil von Leibnitz's Alter mit einan-

der multipliciren, so beträgt das Produkt 245. Wie mußte sich nun der Schüler helfen?

Auflösung. Setzt man die Jahreszahl mit z, so hat man die Gleichung:

$$\frac{z}{2} \times \frac{z}{4} = 368082$$

$$\frac{z^2}{8} = 368082$$

$\times 8)$ $z^2 = 2,94,46,56 \mid 1716$ die damalige Jahreszahl.

$\sqrt[2]{\ }$

2,94,46,56	1716
194	
27	
189	
546	
341	
20556	
3426	
20556	
0	

Um nun das Alter zu berechnen, verfahre man mit x wie oben mit z, so hat man $\frac{x}{2} \times \frac{x}{10} = 245$ zur Gleichung.

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{10} = 245$$

$$\frac{x^2}{20} = 245$$

$\times 20)$ $x^2 = 49,00 \mid 70$ Jahre das Alter.

$\sqrt[2]{\ }$

49,00	70
49	
0	

50. Aufgabe.

In welchem Jahre wurde Napoleon zum Kaiser gekrönt? fragte ein junger französischer Artillerist seinen Lehrer. Dieser gab zur Antwort: Wenn man die Hälfte,

den vierten und elften Theil jener Jahreszahl mit einander multiplicirt, so erscheint ein Produkt von 66715528; und als Artillerist müssen Sie nun berechnen können, in welchem Jahre jene merkwürdige Begebenheit vorfiel.

Auflösung. Man setze die Jahreszahl mit y an, so hat man die Gleichung:

$$\frac{y}{2} \times \frac{y}{4} \times \frac{y}{11} = 66715528$$

$$\frac{y^3}{88} = 66715528$$

88 ×

533724224
533724224

$y^3 = 5,870,966,464$ | $y = 1804$ Jahreszahl der Krönung.

$\sqrt[3]{}$

1
4870
3
24
192
512
4832
38966,464
97200
388800
8640
64
38966464
0

51. Aufgabe.

Ein Landwirth hat so viele Aecker, als einer derselben Scheffel Getreide einträgt, und einstmals traf sich's, daß er für jeden Scheffel eben so viel Groschen erhielt, als er Aecker hat, und 914 Rthlr. 16 Gr. einstrich. Wie viel Aecker waren es, wie viel Scheffel

baute er auf jedem, und wie theuer verkaufte er jeden Scheffel?

Auflösung. Es waren x Aecker, jeder Acker trug x Scheffel, mithin alle Aecker x^2 Scheffel; 1 Scheffel verkaufte er für x Gr., folglich kosteten x^2 Scheffel x^3 Gr. Die 914 Rthlr. 16 Gr. mache man zu Groschen, so erhält man 21952 Gr. und dann folgende Gleichung:

$$x^3 = 21{,}952$$

$$\sqrt[3]{x = 21{,}952} \mid 28 = x$$

```
21,952 | 28 = x
 8
13952
 12
 96
 384
  512
13952
    0
```

x ist also = 28 Aecker, jeder Acker trug 28 Scheffel und jeder Scheffel wurde für 28 Gr. oder 1 Rthlr. 4 Gr. verkauft.

Probe.

1 Acker : 28 Scheffel = 28 Aecker?

```
   28
  224
  56
  784 Scheffel.
```

1 Scheffl. : 1 Rthlr. 4 Gr. = 784 Scheffl.?

```
⅙ Rthl.   784 Rthlr.
          130   =  16 Gr.
          914 Rthlr. 16 Gr.
```

52. Aufgabe.

In welchem Jahre war es doch, als die Lutheraner ihr Glaubensbekenntniß in Augsburg ablegten? fragte ein Lehrer der Mathematik seine Scholaren, und sagte dabei, daß, wenn man die Hälfte, den dritten und den fünften Theil jener Jahreszahl in einander multiplicire, das Produkt 119385900 daraus entstehe. Wie mußten die Scholaren sich helfen?

Auflösung. Setzt man die Jahreszahl zu y, so hat man $\frac{y}{2}\times\frac{y}{3}\times\frac{y}{5}=\frac{y^3}{30}$ und folglich die Gleichung

$$\frac{y^3}{30} = 119385900$$

```
                 30 ×
∛y³ = 3,581,577,000 | 1530 war die Jahreszahl.
      2581
        3
      15
        75
       125
      2375
       206577
         675
       2025
          405
           27
       206577
          0   000
```

53. Aufgabe.

Ein Oekonom, der ein Liebhaber mathematischer Wissenschaften war, begegnete einstmals seinem ehemaligen Lehrer, und fragte diesen nach dem Jahr, in wel=

chem die ersten Kartoffeln in Deutschland gepflanzt worden wären? Das können Sie sich selbst berechnen, antwortete der alte Mathematikus; denn wenn man $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{5}{6}$ jener Jahreszahl mit einander multiplicirt, so erscheint 374343750 zum Produkte. Wie hat sich nun der Oekonom geholfen?

Auflösung. Man verfahre, wie in obigen Aufgaben gezeigt, und setze die Jahreszahl mit z an, so hat man $\frac{z}{2}\times\frac{z}{5}\times\frac{5z}{6}=\frac{5z^3}{60}$, und daher folgende Gleichung:

$$\frac{5z^3}{60} \overset{5}{=} \frac{z^3}{12} = 374343750$$

```
                       374343750
                              12
      ------------------------------
                       748687500
                      374343750
      ------------------------------
 ∛ z³ =               4,492,125,000 | 1650 ist das gesuchte Jahr.
                      3492          |
                      3             |
                      18            |
                      108           |
                       216          |
                      3096          |
                        396125      |
                         768        |
                        3840        |
                         1200       |
                           125      |
                        396125      |
                             0  000
```

Um sich von der Richtigkeit dieser und der vorhergehenden ähnlichen Aufgaben zu überzeugen, berechne man die Probe folgendermaßen:

$$
\begin{array}{llr}
\frac{1}{2} \text{ aus } 1650 & = & 825 \\
\frac{1}{5} \;\; = \;\; = & = & 330 \\
\hline
 & & 24750 \\
 & & 2475 \\
\hline
 & & 272250 \\
\frac{5}{6} \;\; = \;\; = & = & 1365 \\
\hline
 & & 1361250 \\
 & & 1905750 \\
 & & 816750 \\
 & & 272250 \\
\hline
 & & 374343750
\end{array}
$$

Produkt wie oben.

54. Aufgabe.

Haben Sie eine gute Messe gehalten? fragte ein Kaufmann seinen von Leipzig zurückgekommenen Handelsfreund. Die Antwort war: Wenn ich das Quadrat der Thalerzahl, welche ich eingenommen habe, mit dem vierten Theile der Einnahme multiplicire, so entsteht das zwölfzifferige Produkt 168285661936. Wie mußte sich der neugierige Frager nun helfen, um die Geldeinnahme zu erfahren?

Auflösung. Nimmt man die Zahl der Einnahme zu x Rthlr. an, so beträgt das Quadrat x^2, und der vierte Theil derselben $\frac{x}{4}$; daher die Gleichung:

$$x^2 \times \frac{x}{4} = 168285661936$$

oder $\frac{x^3}{4} = 168285661936$

$$\times 4) \quad x^3 = 673142647744$$

$\sqrt[3]{x^3} = 673{,}142{,}647{,}744$ | 8764 Rthlr beträgt die Einnahme.

```
 512
 161142
  192
 1344
  1176
    343
 146503
  14639647
   22707
  136242
     9396
       216
  13718376
      921271744
      2302128
      9208512
         42048
            64
      921271744
             0
```

Als Probe: $8764^2 = 76807696 \times \frac{8764}{4} =$
$= 168285661936$ zum Produkte.

VIII.

Auflösung algebraischer Aufgaben mit zwei und mehr unbekannten Größen.

Enthält eine Gleichung mehr als eine unbekannte Größe, so ist es nicht möglich, den Werth derselben aus ihr allein zu finden; denn der Ausdruck für eine jede derselben muß, außer den schon bekannten Größen, auch noch die übrigen unbekannten enthalten. Enthalten aber zwei verschiedene Gleichungen auch zwei unbekannte Größen, so lassen sich die Größen aus ihnen mit Bestimmtheit entwickeln. Aus jeder Gleichung sucht man nämlich den unbestimmten Werth derselben unbekannten Größe, z. B. von x, beide unbestimmte Werthe (die einander gleich sein müssen, indem sie einerlei Größen darstellen) geben eine dritte Gleichung, die die andere unbekannte Größe (y) in sich enthält; folglich kann diese aus ihr entwickelt werden. Ist aber y bekannt, dann kann auch x, das durch y und lauter bekannte Größen ausgedrückt ist, gefunden oder bestimmt werden.

So viel verschiedene Gleichungen muß man haben, als man unbekannte Größen hat. Bei zwei unbekannten Größen hat man zwei, bei drei drei, bei vier vier Gleichungen u. s. w. nöthig. Um Gleichungen mit drei unbekannten Größen aufzulösen, verfährt man eben so, als bei Gleichungen mit zwei unbekannten Größen; man sucht nämlich aus jeder Gleichung einen Werth für einerlei Größe, z. B. für x; zwei dieser Werthe geben eine neue Gleichung, die nur zwei unbekannte Größen

enthält. Man sucht aus ihr den Werth der einen unbekannten Größe, z. B. von y; alsdann muß man aus der dritten Gleichung für x und einer der beiden erstern ebenfalls eine neue Gleichung bilden, und daraus den Werth für y suchen. Endlich geben diese beiden Werthe von y wieder eine Gleichung, die nur noch eine unbekannte Größe enthält, deren Werth folglich aus ihr gefunden werden kann. Uebrigens verfährt man beim Berechnen eben so, als bei Auflösung von Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

Nachstehende Beispiele werden das Verfahren deutlicher machen.

55. Aufgabe.

In einem Dorfe wurden 580 Soldaten, Infanterie und Cavallerie, einquartirt. Die Infanterie betrug aber 120 Mann mehr als die Cavallerie. Wie groß war daher jede Mannschaft?

Auflösung. Man setze, es waren x Infanteristen und y Cavalleristen, so hat man $x + y = 580$ zur ersten, und $x = y + 120$ zur zweiten Gleichung; folglich auch $x = 580 - y$. Daher:

$$580 - y = y + 120 \text{ und folglich}$$
$$580 - 120 = y + y$$
abgekürzt
$$:2)\quad 460 = 2y$$
$$230 = y.$$
Folglich waren es 230 Cavalleristen und $(230 + 120) = 350$ Infanteristen; und $350 + 230 = 580$ Mann.

56. Aufgabe.

Ein Oekonom kauft zwei Pferde zusammen für 195 Rthlr., wovon das eine $\frac{1}{5}$ mehr als das andere kostet. Wie theuer war jedes?

Auflösung. Setzt man den Preis des einen zu x und den des andern zu y; so ist $x + y = 195$. Ferner ist $x = y + \frac{y}{5}$. Also

1) $x + y = 195$ Rthlr.; mithin $x = 195 - y$.

2) $x = y + \frac{y}{5} = 1\frac{y}{5}$.

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$195 - y = 1\frac{y}{5}$$

mithin $195 = 1\frac{y}{5} + y = 2\frac{y}{5} = \frac{11y}{5}$

daher $y = 195 : \frac{11}{5} = 88\frac{7}{11}$ Rthlr.

Hieraus folgt $x = 88\frac{7}{11} + \frac{1}{5} = 88\frac{7}{11} + 17\frac{8}{11} = 106\frac{4}{11}$ Rthlr. Das eine kostete also $88\frac{7}{11}$ Rthlr. und das andere $106\frac{4}{11}$ Rthlr., also beide 195 Rthlr.

57. Aufgabe.

Wie theuer haben Sie die drei Pferde gekauft? fragte ein Artillerieofficier einen seiner Mitofficiere, der mit drei schönen Reitpferden vom Roßmarkte zurückkehrte. Dieser, schon auf die Frage vorbereitet, antwortete: Der Preis des Braunen beträgt mit den halben Preisen der beiden übrigen 32 Louisd'or; der Preis des Fuchses macht mit dem dritten Theile der zwei andern 28 Louisd'or; und der Preis des Schimmels beträgt mit den halben Preisen des Braunen und Fuchses 38 Louisd'ors. Nun, Herr Kammrad, können Sie sich's halter selbst berechnen, wie viel ich für jedes bezahlt habe. Wie theuer war jedes dieser Pferde?

Auflösung. Da hier drei unbekannte Größen bestimmt werden müssen, so setze man den Preis des Braunen zu x, den des Fuchses zu y, und den des

Schimmels zu z Louisd'ors, und formire drei Gleichungen folgendermaßen:

$$1)\quad x + \frac{y+z}{2} = 32 = 2x + y + z = 64$$
$$z = 64 - 2x - y$$

$$2)\quad y + \frac{x+z}{3} = 28 = 3y + x + z = 84$$
$$z = 84 - 3y - x$$

$$3)\quad z + \frac{x+y}{2} = 38 = z = 38 - \frac{x-y}{2}.$$

4)

$$64 - 2x - y = 84 - x - 3y$$
$$-64 + 2x + 3y = 64 + 2x + 3y$$
$$:2)\quad 2y = 20 + x$$
$$y = \frac{20+x}{2}.$$

5)

$$84 - x - 3y = 38 - \frac{x-y}{2}$$
$$(2\times)\quad 168 - 2x - 6y = 76 - x - y$$
$$-76 + x + 6y = 76 + x + 6y$$
$$:5)\quad 92 - x = 5y$$
$$\frac{92-x}{5} = y.$$

6)

$$\frac{20+x}{2} = \frac{92-x}{5}$$
$$(2\times)\quad 20 + x = \frac{184-2x}{5}$$
$$(5\times)\quad 100 + 5x = 184 - 2x$$
$$-100 + 2x - 100 + 2x$$
$$:7)\quad 7x = 84$$
$$x = 12$$ Louisd'ors der Braune.

Nun zurück substituirt, z. B. am Ende der 6. Gleichung

$$y = \frac{20 + x}{2} = \frac{20 + 12}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ Louisd'ors,}$$

der Preis des Fuchses.

Und endlich in der ersten Gleichung

$$z = 64 - 2x - y$$

das ist $z = 64 - 24 - 16$

$$z = 64 - 40 = 24 \text{ Louisd'ors der Schimmel.}$$

Probe.

Der Braune.	Der Fuchs.	Der Schimmel.
12 Louisd'ors.	16 Louisd'ors.	24 Louisd'ors.
$8 = \frac{1}{2}$ aus 16	$4 = \frac{1}{3}$ aus 12	$8 = \frac{1}{2}$ aus 16
$12 = \frac{1}{2}$ aus 24	$8 = \frac{1}{3}$ aus 24	$6 = \frac{1}{2}$ aus 12
32 Louisd'ors.	28 Louisd'ors.	38 Louisd'ors.

58. Aufgabe.

Haben Sie Ihre diesjährige Wolle theuer verkauft? fragte ein Pächter den andern, und die Antwort war: ich hatte dreierlei Sorten, nämlich feine, mittel und ordinaire. Für die feine und mittel Sorte bekam ich 24 Rthlr., für die mittel und ordinaire 14 Rthlr., und für die feine und ordinaire 22 Rthlr. pro Stein. Wie hoch hatte er jede Sorte verkauft?

Auflösung. Da hier wieder der Werth von drei unbekannten Größen gesucht werden soll, so bezeichne man den Preis der 1. Sorte mit x, den der 2. Sorte mit y, und den der 3. mit z, dann hat man folgende drei Gleichungen:

$$1)\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 24 = \frac{y}{2} = 24 - \frac{x}{2}$$

$$2)\ \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 14 = \frac{z}{2} = 14 - \frac{y}{2}$$

$$3)\ \frac{z}{2} + \frac{x}{2} = 22 = \frac{z}{2} = 22 - \frac{x}{2}$$

4)

$$14 - \frac{y}{2} = 22 - \frac{x}{2}$$

$$28 - \frac{2y}{2} = 44 - x$$

$$56 - 2y = 88 - 2x$$

versetzt: $2x + 56 = 88 + 2y$

$$- 88 - 88$$

$$2x - 32 = 2y$$

: 2) $\frac{2x - 32}{2} = y$

5)

$$\frac{2x - 32}{2} = 24 - \frac{x}{2}$$

$$4x - 64 = 48 - x$$

$$4x - 64 = 96 - x$$

$$+ x \qquad + x$$

$$5x - 64 = 96$$

$$+ 64 + 64$$

$$5x = 160$$

: 5) $x = 32$ Rthlr. hat die erste oder feine Sorte gekostet.

Statt $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 24$ setze man nun, da x bekannt ist, $\frac{32}{2} + \frac{y}{2} = 24$, um den Werth von y zu finden.

$$\frac{y}{2} + \frac{32}{2} = 24$$

$$\frac{y}{2} + 16 = 24$$

× 2) $y + 32 = 48$

$$- 32 - 32$$

$y = 16$ Rthlr. hat die zweite oder mittel Sorte gekostet.

Eben so suche man nun den Werth von z.

$$\frac{z}{2} + \frac{32}{2} = 22$$

$$\frac{z}{2} + 16 = 22$$

$$\times 2) \quad z + 32 = 44$$

$$- 32 \quad - 32$$

$z = 12$ Rthlr. hat die dritte oder ordinaire Sorte gekostet.

Probe.

$$\tfrac{32}{2} + \tfrac{16}{2} = 24$$

$$\tfrac{16}{2} + \tfrac{12}{2} = 14$$

$$\tfrac{12}{2} + \tfrac{32}{2} = 22.$$

59. Aufgabe.

Der Oekonom y sagt zu seinem Collegen z: gib mir 5 von Deinen Arbeitern, so habe ich eben so viel als Du; z erwiederte: da mein Gut zweimal so groß als das Deinige ist, so sollten auch billig zweimal so viel Arbeiter dabei angestellt sein, und hierzu darfst Du mir nur 4 von Deinen Leuten ablassen. Wie viel Arbeiter waren auf jedem Gute beschäftigt?

Auflösung. Setzt man die Zahl der Arbeiter des y zu y und die des z zu z, so hat man nach Verlangen des Erstern $y + 5 = z - 5$, und im andern Falle $y - 4 \times 2 = 2y - 8$, und also $z + 4 = 2y - 8$. Mithin folgende Gleichungen:

$$2y - 8 = z + 4$$

abgezogen $y + 5 = z - 5$

$$y - 13 = \quad + 9$$

$$+ 13 \quad + 13$$

$y = 22$ Arbeitsleute auf dem Gute des y.

$$\begin{array}{rcl} z - 5 = 22 + 5 & = & 27 \\ +5 & & +5 \\ \hline z & = & 32 \end{array}$$ Arbeiter auf dem Gute des z.

Wenn y von seinen Leuten 4 an z gäbe, so hätte dieser 36 und jener 18; überließ aber z 5 an y, so würden beide an der Zahl gleich sein, nämlich jeder 27.

60. Aufgabe.

Es hatte Jemand einen Geldbeutel in der Hand und sagte zu seinem Freunde: rathen Sie einmal, wie viel diese Baarschaft, in Laubthalern und Louisd'ors, jede Sorte in Stücken beträgt; wenn 1 Laubthaler zu 2, und ein Louisd'or zu 1 Loth angenommen, und dieser zu 5, und jener zu $1\frac{1}{2}$ Rthlr. gerechnet wird, so wiegt die ganze in 290 Rthlrn. bestehende Summe genau 5 Pfund oder 160 Loth.

Auflösung. Setzt man die Laubthaler mit x, so beträgt ihr Gewicht 2x Loth, und die Louisd'ors y Loth. Daher die erste Gleichung

$$2x + y = 160 \text{ Loth.}$$

Da ferner 1 Laubthaler = $1\frac{1}{2}$ Rthlr. und 1 Louisd'or = 5 Rthlr., so ergibt sich die zweite Gleichung mit

$$\begin{array}{lrcl} & 1\frac{1}{2}x + 5y & = & 290 \text{ Rthlr.} \\ \hline \text{oder} & 3x + 10y & = & 580 \text{ halben Rthlrn.} \\ & -10y & & -10y \\ \hline & 3x & = & 580 - 10y \\ :3) & \overline{\quad x \quad} & = & \overline{\frac{580 - 10y}{3}}. \end{array}$$

Eben so mit der ersten Gleichung, und alsdann beide Werthe von x zusammengestellt.

$$2x + y = 160$$
$$\underline{\quad -y \quad -y}$$
$$:2)\ \underline{2x = 160 - y}$$
$$x = \frac{160 - y}{2}$$

Zusammengestellt $\frac{160 - y}{2} = \frac{580 - 10y}{3}$

$$\times 2)\ 160 - y = \frac{1160 - 20y}{3}$$
$$\times 3)\ 480 - 3y = 1160 - 20y$$
$$\underline{-480 \quad - 480}$$
$$-3y = 680 - 20y$$
$$\underline{+20y \quad +20y}$$
$$:17)\ \underline{17y = 680}$$
$$y = 40 \text{ Louisd'ors.}$$

Und nun den Werth von x gesucht

$$x = \frac{160 - 40}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ Laubthlr.}$$

Probe.

1) In Rücksicht des Gewichtes.

60 Laubthlr.	à 2 Loth	=	120	Loth.
40 Louisd'ors	à 1 Loth	=	40	"
			160	Loth.

2) In Rücksicht der Thalersumme.

60 Laubthlr.	à $1\frac{1}{2}$ Rthlr.	=	90	Rthlr.
40 Louisd'ors	à 5 Rthlr.	=	200	"
			290	Rthlr.

61. Aufgabe.

Wie viel haben Sie gestern im Pharo gewonnen? wurde ein Offizier von einem Studenten der Mathematik gefragt. Der Officier antwortete: dies sage ich eben so ungern, als wenn ich verloren habe. Doch sollen Sie es nicht ohne Anwendung Ihres Studiums erfahren, und deshalb erwiedere ich auf Ihre Neugierde Folgen=

des: die Thalersumme meines Gewinnstes besteht in drei Ziffern, welche, wenn letztere addirt werden, die Zahl 20 geben. Subtrahirt man die zweite Ziffer von der ersten, und den hieraus entstehenden Rest von der dritten, so bleibt 4. Zieht man aber die zweite von der dritten, und den entstandenen Rest von der ersten Ziffer ab, so bleibt 2 übrig. Wie hat sich nun der Studiosus helfen müssen?

Auflösung. Werden die drei Ziffern mit x, y und z bezeichnet, so hat man die erste Gleichung mit

$$x + y + z = 20, \text{ folglich}$$

die zweite $z - (x - y) = 4$ oder $z - x + y = 4$

und die dritte $x - (z - y) = 2$ oder $x - z + y = 2$.

Wird nun die zweite Gleichung von der ersten abgezogen, so erhält man den Werth von x, und y nebst z fallen aus.

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 20 \\ -x + y + z & = & 4 \\ + \quad - \quad - & & - \\ \hline 2x & = & 16 \\ :2) \quad x & = & 8 \text{ die erste Ziffer.} \end{array}$$

Addirt man nun die beiden letztern Gleichungen, so wird der Werth von y gefunden, und x nebst z fallen aus.

$$\begin{array}{rcl} z - x + y & = & 4 \\ -z + x + y & = & 2 \\ \hline 2y & = & 6 \\ :2) \quad y & = & 3 \text{ die zweite Ziffer.} \end{array}$$

Und nun in der ersten Gleichung die Werthe für x und y substituirt, gibt endlich den Werth von z.

$$\begin{array}{rcl} 8 + 3 + z & = & 20 \\ \hline 11 + z & = & 20 \\ -11 & & -11 \\ \hline z & = & 9 \text{ die dritte Ziffer.} \end{array}$$

Mithin beträgt die gesuchte Zahl 839, und so viele Thaler hatte also der Offizier gewonnen.

Probe.
$$\begin{array}{r} 8 \\ 3 \\ 9 \\ \hline 20 \end{array}$$
Summe der drei Ziffern.

$8 - 3 = 5$ und $9 - 5 = 4$
$9 - 3 = 6$ und $8 - 6 = 2$.

62. Aufgabe.

Drei Arbeiter sind zusammen 360 Tage an einem Werke beschäftigt gewesen. A hat täglich 8 Gr., B 10 Gr. und C 12 Gr. erhalten. Nach vollendeter Arbeit hatte einer so viel als der andere dabei an Lohne bekommen. Wie viel Tage hat jeder besonders gearbeitet, und wie viel dafür bekommen?

Auflösung. Hat A x Tage gearbeitet, so beträgt sein Lohn 8 x Gr. und sonach B 10 y Gr., folglich C $360 - x - y$ und erhält mithin $12\,(360 - x - y) = 4320 - 12x - 12y$.

$$:8)\ \text{Nun ist } 8x = 10y$$
$$x = \frac{10y}{8}.$$

Ferner ist $10y = 12\,(360 - x - y)$, wird dieser Werth substituirt, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$10y = 12\left(360 - \frac{10y}{8} - y\right)$$
$$10y = 4320 - \frac{120y}{8} - 12y$$
$$80y = 34560 - 120y - 96y$$
$$- 96y$$
$$80y = 34560 - 216y$$
$$+216 \qquad + 216y$$
$$296y = 34560$$

$$296y = 34560 \mid 116\tfrac{28}{37} \text{ Tage} = y.$$

$$:296)$$

```
296y = 34560 | 116 28/37 Tage = y.
: 296)  296
        ---
        496
        296
        ---
        2000
        1776 | 8
        ----
        224/296 = 28/37
```

Substituirt man nun den Werth von y in der Gleichung $x = \frac{10y}{8}$, so beträgt $x = 145\frac{35}{37}$ Tage. Denn $x = \frac{10 \times 116\frac{28}{37}}{8} = 145\frac{35}{37}$. Folglich $360 - 116\frac{28}{37} - 145\frac{35}{37} = 97\frac{11}{37}$ Tage für C.

Probe.

A hat	$145\frac{35}{37}$ Tage	à 8 Gr.	= 48 Rthlr.	15 Gr.	$6\frac{30}{37}$ Pf.
B „	$116\frac{28}{37}$ „	à 10 „	= 48 „	15 „	$6\frac{30}{37}$ „
C „	$97\frac{11}{37}$ „	à 12 „	= 48 „	15 „	$6\frac{30}{37}$ „
	360 Tage.				

Druckfehler.

S. 10 Z. 5 v. u. muß heißen: $3m^3 + 3w^2 - 3x + 5z^4$.
„ 13 „ 4 v. o. „ „ $7m + 6n^2 + 13p - 11v - 7w$.
„ 20 „ 1 v. o. muß im Quotient heißen: $b^3 - 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.
„ 28 „ 8 v. u. ließ Arithmetik statt Mathematik.
„ 29 im 5. Beispiele rechter Hand muß der Generalnenner 20xz statt xz2c heißen.
„ 29 eben daselbst ist die Summe $\frac{16akbv^2 - 15mnbv^2}{40bv^4}$
„ 38 Z. 8 v. u. muß heißen: $30 \times 30 \times 30 = 27000$ statt $20 \times 30 \times 30 = 27000$.
„ 41 „ 4 v. u. fehlt unter $+ 54yz^2$ das $-$ Zeichen unter $+$.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

[illegible]

Preis:

[illegible]

Druckfehler.

[illegible]

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Sternickel, Friedrich Wilhelm,

Algebra numerosa oder practisch-demonstrative Anweisung zur Buchstaben-Arithmetik ein Hilfs- u. Uebungsmittel für Gymnasien, Stadt-Industrie- u. Werkschulen, so wie fuer Militair-Bildungs-Institute

Ilmenau 1832

Math.p. 715 d
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083252-1